



2020 届 硕 士 学 位 论 文

APOS 理论视角下 小学数学概念教学案例研究

作者姓名	李嘉昕
指导教师	郭芬云 副教授 韩淑珍 中小学高级
学科专业	教育硕士
研究方向	小学教育
培养单位	教育科学学院
学习年限	2018 年 9 月至 2020 年 6 月

二〇二〇年六月

山西大学

2020 届硕士学位论文

APOS 理论视角下 小学数学概念教学案例研究

作者姓名	李嘉昕
指导教师	郭芬云 副教授 韩淑珍 中小学高级
学科专业	教育硕士
研究方向	小学教育
培养单位	教育科学学院
学习年限	2018 年 9 月至 2020 年 6 月

二〇二〇年六月

Thesis for Master's degree, Shanxi University, 2020

APOS Theory
A Case Study on Mathematics Concept Teaching in Primary
School

Student Name	Jia-xin Li
Supervisor	A.Prof. Fen-yun Guo
	Pri/Sec School Teacher-Senior
	Shu-zhen Han
Major	Master of Education
Specialty	Primary School Education
Department	School of Education Science
Research Duration	2018.09-2020.06

June, 2020

目 录

中 文 摘 要.....	I
ABSTRACT.....	II
第一章 绪论.....	1
1.1 问题的提出.....	1
1.1.1 《义务教育数学课程标准（2011 版）》要求.....	1
1.1.2 小学数学概念在小学数学学习中的重要性.....	1
1.1.3 APOS 理论对概念教学的重要意义.....	1
1.2 研究意义.....	2
1.2.1 理论意义.....	2
1.2.2 实践意义.....	2
1.3 研究现状.....	2
1.3.1 关于小学数学概念教学的研究现状.....	3
1.3.2 关于 APOS 理论的研究现状.....	4
1.4 研究目的、内容、方法.....	6
1.4.1 研究目的.....	6
1.4.2 研究内容.....	6
1.4.3 研究方法.....	7
1.5 相关概念.....	8
1.5.1 数学概念含义.....	8
1.5.2 小学数学概念教学.....	9
第二章 APOS 理论对小学数学概念教学的可行性.....	10
2.1 理论基础.....	10
2.1.1 操作阶段（Action）.....	10
2.1.2 过程阶段（Process）.....	10
2.1.3 对象阶段（Object）.....	11
2.1.4 图式阶段（Schema）.....	11
2.2 APOS 理论对小学数学概念教学的独特价值.....	12
2.2.1 小学数学概念的特点.....	13
2.2.2 APOS 理论对小学数学概念教学的适切性分析.....	13

第三章 小学数学概念教学案例的 APOS 理论阶段分析.....	16
3.1 小学数学概念在 APOS 理论视角下的操作阶段案例及分析.....	17
3.1.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》.....	17
3.1.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》.....	19
3.1.3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》.....	21
3.2 小学数学概念在 APOS 理论视角下的过程阶段案例及分析.....	23
3.2.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》.....	23
3.2.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》.....	25
3.2.3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》.....	26
3.3 小学数学概念在 APOS 理论视角下的对象阶段案例及分析.....	29
3.3.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》.....	29
3.3.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》.....	30
3.3.3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》.....	31
3.4 小学数学概念在 APOS 理论视角下的图式阶段案例及分析.....	33
3.4.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》.....	33
3.4.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》.....	34
3.4.3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》.....	35
第四章 结论及反思.....	37
4.1 结论.....	37
4.1.1 APOS 理论下的小学概念教学能促进小学生的发展.....	37
4.1.2 APOS 理论下的小学数学概念教学能促进小学生学习的积极性.....	39
4.2 反思.....	39
4.2.1 应增强教师自身专业素养.....	40
4.2.2 应提高教师教学能力.....	41
4.2.3 应提升教师团队协作和反思能力.....	43
4.3 展望.....	45
参考文献.....	47
附录一.....	52
附录二.....	53
致谢.....	55
个人简况及联系方式.....	56

承诺书.....	57
学位论文使用授权声明.....	58

Contents

Chinese abstract	I
ABSTRACT	II
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Questions.....	1
1.1.1 Requirements of compulsory education mathematics curriculum standard (2011 Edition)	1
1.1.2 The importance of primary school mathematics concept in primary school mathematics learning.....	1
1.1.3 Significance of APOS theory to concept teaching.....	1
1.2 Research significance.....	2
1.2.1 Theoretical significance.....	2
1.2.2 Practical significance	2
1.3 Research status	2
1.3.1 Research status of primary school mathematics concept teaching.....	3
1.3.2 Research status of APOS theory	4
1.4 Research purpose, content and method.....	6
1.4.1 Research purpose.....	6
1.4.2 Research content	6
1.4.3 Research methods	7
1.5 Related concepts.....	8
1.5.1 Mathematical concept meaning.....	8
1.5.2 Primary school mathematics concept teaching.....	9
Chapter 2 The feasibility of APOS Theory in the teaching of mathematical concepts in primary schools	10
2.1 Theoretical basis	10
2.1.1 Action	10
2.1.2 Process	10
2.1.3 Object	11
2.1.4 Schema.....	11
2.2 The unique value of APOS Theory in primary school mathematics concept	

teaching.....	12
2.2.1 Characteristics of mathematical concepts in primary schools	13
2.2.2 Analysis of the applicability of APOS theory to the teaching of mathematical concepts in primary schools.....	13
Chapter 3 Analysis of the APOS theory stage of the teaching cases of mathematical concepts in primary schools	16
3.1 Action stage cases and analysis of primary school mathematical concepts from the perspective of APOS theory	17
3.1.1 Case 1: the meaning of decimal in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition	17
3.1.2 Case 2: the cognitive gram in the third grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	19
3.1.3 Case 3: Double statistical table in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	21
3.2 Process stage cases and analysis of primary school mathematical concepts from the perspective of APOS theory	23
3.2.1 Case 1: the meaning of decimal in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition	23
3.2.2 Case 2: the cognitive gram in the third grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	25
3.2.3 Case 3: Double statistical table in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	26
3.3 Object stage cases and analysis of primary school mathematical concepts from the perspective of APOS theory.....	29
3.3.1 Case 1: the meaning of decimal in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	29
3.3.2 Case 2: the cognitive gram in the third grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	30
3.3.3 Case 3: Double statistical table in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition	31

3.4 Schematic stage cases and analysis of primary school mathematical concepts from the perspective of APOS theory	33
3.4.1 Case 1: the meaning of decimal in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	33
3.4.2 Case 2: the cognitive gram in the third grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition.....	34
3.4.3 Case 3: Double statistical table in the fifth grade mathematics volume I of Jiangsu Education Edition	35
Chapter 4 conclusion and reflection	37
4.1 Conclusion	37
4.1.1 The primary school concept teaching under the POS theory will promote the development of primary school students.....	37
4.1.2 The teaching of mathematical concepts in primary schools under the APOS theory will promote the enthusiasm of primary school students to learn....	39
4.2 Reflection	39
4.2.1 Teachers' professional quality should be enhanced.....	40
4.2.2 Teachers' teaching ability should be enhanced.....	41
4.2.3 Teachers' ability of teamwork and reflection should be improved.....	43
4.3 Outlook.....	45
References	47
Appendix 1.....	52
Appendix 2	53
Thanks.....	55
Personal profile and contact	56
Undertaking.....	57
License Thesis Statement	58

中 文 摘 要

《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出，数学知识的教学，要注重知识的“生长点”与“延伸点”，而数学概念作为知识的生长点与延伸点被看做是数学知识的基础、思维的核心，并且数学概念在小学数学教材中随处可见，就连“1”这个数字都是一个数学概念，因此数学概念作为数学知识的细胞，就成为了构造数学大厦的基石，若基石不稳，则数学这栋大厦就难以稳固。但是，数学概念具有抽象性、枯燥性、复杂性，而小学阶段学生的思维大部分仍是处于具体形象阶段，由于二者之间存在冲突，从而导致无法提起学生学习的兴趣。通过对一些概念教学的课堂分析，发现真正能够让学生掌握概念的课堂基本上都是基于 APOS 理论，因此本论文将以 APOS 理论为视角对三个小学概念课堂的案例进行分析，基于此认真反思了 APOS 理论指导概念教学时小学数学教师应该如何做。

通过对文献的梳理，笔者发现将 APOS 理论应用到小学数学概念教学中的研究很少，因此本论文将首先通过对 APOS 理论与小学数学概念教学相结合的適切性进行分析，并采用案例分析法对小学阶段的三个案例以 APOS 理论视角进行每一阶段的具体分析，结合课前课后对教师的访谈以及课堂中对教师和学生的观察，对在此过程中教师如何做的以及学生的表现如何进行具体的阐述。最后通过三个案例总结反思，提出 APOS 理论应用于小学数学概念中的好处以及在此基础上给教师提出一些建议，希望将其运用在实际教学中时可以提供一些帮助，以促进教师的教和学生的学，让学生真正的进行主动的构建，最后，由于时间与能力的有限性，本文不管是从研究内容还是研究方法上都存在一些不足。

关键词：APOS 理论；数学概念教学；案例研究

ABSTRACT

The mathematics curriculum standard of compulsory education (2011 Edition) points out that the teaching of mathematics knowledge should pay attention to the "growth point" and "extension point" of knowledge, while mathematics concept, as the growth point and extension point of knowledge, is regarded as the foundation of mathematics knowledge and the core of thinking, and mathematics concept can be seen everywhere in primary school mathematics textbooks, even the simple number "1" is one Mathematics concept, therefore, as the cell of mathematics knowledge, mathematics concept has become the cornerstone of the construction of mathematics building. If the cornerstone is not stable, mathematics building is difficult to be stable. However, the concept of mathematics is abstract, boring and complex, and most of the thinking of primary school students is still in the stage of concrete image. Because of the conflict between the two, the study-interest of students can not be raised. Through the classroom analysis of some concept teaching, it is found that the classroom that can really let students master the concept is basically based on the APOS theory. Therefore, this paper will analyze the cases of three primary school concept classes from the perspective of the APOS theory, and based on this, carefully reflect on how primary school mathematics teachers should do when the APOS theory guides the concept teaching.

Based on the literature review, the author finds that there are few researches on the application of APOS Theory in primary school mathematics concept teaching. Therefore, this paper will first analyze the relevance of the combination of APOS theory and primary school mathematics concept teaching, and use case analysis method to analyze three cases in primary school from the Perspective of APOS Theory in each stage, combining with teachers before and after class The interview and the observation of teachers and students in the classroom, and the specific description of how teachers do

and students' performance in this process. Finally, through three cases summary and reflection, this paper puts forward the advantages of the application of APOS Theory in primary school mathematics concepts and some suggestions for teachers on this basis, hoping to provide some help when it is applied in actual teaching, so as to promote teachers' teaching and students' learning, so that students can really carry out active construction. Finally, due to the limitation of time and ability, this paper does not care about There are some deficiencies in research content and methods.

Key words: APOS theory; Mathematics concept teaching; Case study

第一章 绪论

1.1 问题的提出

1.1.1 《义务教育数学课程标准（2011 版）》要求

《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出：数学知识的教学，要注重知识的“生长点”与“延伸点”，^①而数学概念作为知识的生长点与延伸点被看做是数学知识的基础，是数学教学的逻辑起点，是学生认知、掌握数学知识、提升数学能力的根本，小学阶段的数学是之后数学学习“万丈高楼”的基石，小学阶段的数学概念是整个数学知识体系的基础。因此数学概念的理解是小学数学课堂的重要教学内容，是数学教学的重要组成部分，而教师概念教学有利于帮助学生掌握知识，建立整体知识网络，促进学生的发展。

1.1.2 小学数学概念在小学数学学习中的重要性

我国著名的数学特级教师邱兴华认为小学数学概念大致分为：数概念、运算概念、数的整除性概念、量的计量概念、几何形体概念、比和比例概念、简易方程概念、应用题概念、统计图概念，^②这些概念几乎涵盖了整个小学阶段所需要学习的所有知识，就连“1”这样一个简单的数字都是一个关于数的概念知识，因此在整个小学阶段中根本无法脱离数学概念的教学。数学概念是一切数学规则的研究、表达与应用的基础，是构造数学大厦的基石，因此数学概念在小学学习中具有重要意义，概念若不清，就难以准确应用，不知道在讲什么，也不知道在学什么，更是难以形成新的概念。

美国学者林恩·埃里克森曾说过数学是一门概念驱动的学科，因此数学概念作为数学知识的生长点与延伸点，能促进学生思维上的发展、逻辑上的提升、运算与应用上的提高，能在众多的概念中识别出自己所需的概念并成为日后数学学习的基石等等。同时数学概念具有独特的学科价值，不仅可以培养学生的概括能力、推理能力、迁移能力、逻辑思考能力，还可以培养学生的辩证思维、符号意识和应用意识；同时数学概念具有应用性，比如当学生某道数学题做错时，老师会说“你对某个概念不清晰”，再纵观小学奥数题，很多题当追溯到原概念上时会变得更加的简单，更容易做出来，足以可见小学数学概念在小学数学学习中的重要性。

1.1.3 APOS 理论对概念教学的重要意义

^① 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准(2011 版). 北京, 北京师范大学出版社, 2011, 18.

^② 邱兴华. 小学数学教学研究. 福建, 福建教育出版社, 1990, 355.

首先，APOS 理论是一个专门针对数学概念学习过程的理论，该理论认为学生在学习数学概念的时要经历四个阶段，分别是“操作（Action）”、“过程（Process）”、“对象（Object）”和“图式（Scheme）”，当这四个阶段按顺序发生在学生身上时，学生就认知了这个数学概念；其次，数学概念的枯燥性、复杂性和抽象性可能会导致小学生对于数学学习的烦闷性，而 APOS 理论中的操作阶段以小学生实际生活出发，以激发起学生的探索欲和学习的兴趣，让学生主动思考，从而促进思维的内化，达到对概念的理解，最终形成综合图式。因此 APOS 理论对数学概念教学具有重要的意义。

1.2 研究意义

1.2.1 理论意义

在查找阅读与梳理文献时，发现之前对数学概念研究都聚焦在中学与高等数学教学中，对小学阶段研究较少，因此本文研究内容可以为日后的小学数学概念教学的研究提供一些基础。同时本研究用 APOS 理论作为研究的理论支撑，通过分析小学数学概念的特征、小学生的思维发展特征，以及 APOS 理论的特征，最终得出将 APOS 理论放于小学阶段的数学概念教学研究具有一定的可行性，这样不仅仅丰富 APOS 理论对各个学段的应用，而且还能使得小学阶段的数学概念教学更加完善。

1.2.2 实践意义

1.2.2.1 促进学生的学

知识应该是由学生主动自觉的学到的，而不是教师教授让学生被迫接受的，数学概念的枯燥性导致学生不想学，然而 APOS 理论最初的活动环节能激发起学生的探知欲，让学生积极主动的学习，从而促进学生的发展。

1.2.2.2 促进教师的教

本论文提供了三则不同的案例，从选取角度而言，不管是根据概念的分类标准，还是授课教师而言都具有一定的典型性，并且将这三节课通过课堂呈现和案例分析用 APOS 各个理论阶段做了简单的分析，希望能够通过这些案例和这些分析给从事小学数学老师在教授数学概念时一些启示，能让教师更加重视学生的已有经验，使学生自己从实际生活中抽象出关于数学的本质属性，并体验到学习数学知识的乐趣，教师要在教学的过程中更好的找寻能适应学生发展的契合点，让教师更有效的教学，促进教师的教。

1.3 研究现状

1.3.1 关于小学数学概念教学的研究现状

在中国知网上以小学数学概念教学为题名进行搜索，共 17 篇硕博论文，700 多篇期刊，这些文献从 1980 年跨度到 2019 年，因此，我国从 20 世纪 80 年代开始，小学数学概念教学就开始被教育界的研究者关注并对其进行研究，随后研究的人越来越多，但是并没有中学以及高等数学的研究多。在对这些文献进行梳理的过程中发现，我国对小学数学概念教学的研究大致分为以下几个方面。

1.3.1.1 关于小学数学概念教学存在的问题研究

一些研究者提出了概念教学中常见的问题，在对这些存在的问题中的文献进行梳理时，发现所提出的问题具有同质性。第一，重结论轻过程，老师们深知数学概念的重要性，但是在执行过程中偏重于结论而忽视了学生学习的过程，急迫的将结论展示出来；第二，重识记轻理解，从各学者的研究中所呈现的成果以及对现状的观察发现，教师们在帮助学生掌握概念时较为偏重对于概念的运用以及对概念的机械识记；第三，引入不当缺乏科学性，导致无法调动起学生的学习兴趣，枯燥的学习枯燥的概念知识；第四，忽略概念的形成与联系，新知识与有关联的旧知识之间没有进行有意义的建构，导致知识的零散化；第五，教师对概念教学的形式主义等问题。

1.3.1.2 关于小学数学概念教学策略的研究

在查阅文献时发现我国学者对于小学数学概念教学策略的研究比较多，对其进行整理，大致分为对概念引入时、概念建立时和概念的巩固和深化三个方面所提出的意见与建议。比如，在概念引入时要形象直观，尽可能与学生的原有兴趣相联系，尽可能从学生原有知识基础上进行引入，以此充分调动起学生的学习兴趣，让学生对于枯燥的概念学习也能时刻保持注意；在概念建立时要多利用变式、对比分析、正反衬托等多个方面，让学生能够深刻的理解概念，而不是机械识记概念，同时能让学生对有相似度的几个概念进行意义区分，真正的掌握概念的涵义与其外延；在概念巩固和深化时要注重让学生应用，要建立概念系统等多个方面的策略。

一些研究者以别的视角对数学概念教学策略进行研究。比如，利用概念图的方式促进小学的概念教学，这种以概念图进行教学的方式有多方面的好处，首先教师在对教学进行设计时更有条理，当教师对整体的概念知识具有条理性时才能有条理的教学，同时学生对知识的掌握也更具系统性，最终促进学生的逻辑思维的发展；有的利用引导发现法进行概念教学，顾名思义，这种方式要求学生自己主动发现，教师对学生的整个发现学习进行有意义的指导，改变概念教学存在活动的形式化、

情境单一化、学生能力不足等问题。还有些研究者提出用某种理论进行小学数学概念教学，比如利用本文所用的 APOS 理论以及基于 PCK 内涵解析视角等。

1.3.1.3 关于小学数学概念教学的育人价值研究

从各个研究者对小学阶段的数学概念存在问题的研究或者是策略办法的研究上，都足以表明小学数学概念教学所体现出的育人价值，因此在对各个文献中所提出的育人价值进行分析梳理，发现主要有两种价值，一种是一般价值，比如小学生在进行概念学习时，可培养小学生的探究能力，归纳演绎的能力，数学分析分类意识，抽象概括能力以及数学语言表达能力等；另外一种特殊价值，如小学数学概念教学可让学生经历数概念和形概念，数概念可让学生经历概念的形成过程，在概念学习中可培养其主动迁移的能力，能够帮助学生建立数感，形概念可形成辨析比较和抽象概括的能力，提升语言准确的表达能力等。

1.3.2 关于 APOS 理论的研究现状

APOS 理论的研究现状将分为国内与国外两个部分。

1.3.2.1 国外关于 APOS 理论的研究

20 世纪 80 年代杜宾斯基等人发起了 APOS 理论，主要对国外 APOS 理论层面和应用层面进行梳理。

首先，理论层面。自该理论出现后，杜宾斯基等人进行了大量的关于 APOS 理论的研究，最终得以确定到底什么是 APOS 理论，也让人们了解到在学习数学概念时是如何进行认知的，这一理论慢慢得到了国外学者的关注，开始对杜宾斯基提出的理论进行研究与分析其合理性与价值，不断完善该理论。

其次，应用层面。杜宾斯基通过对 APOS 理论的介绍、实验、数据统计，并在大学课堂中进行了数学课堂概念教学的实践改革，随后很快被应用在高等数学中，其科学性也得到了美国同行的肯定。除此以外，其他国家学者专家也开始将目光聚焦到 APOS 理论研究上，例如，加拿大的瑞纳认为在对新的数学老师进行评价时可以用该理论进行检验；以色列的丽安娜将该理论与其他理论结合起来进行研究。

1.3.2.2 国内关于 APOS 理论的研究

我国对于 APOS 理论的研究从两个层面展开，分别是理论应该用层面和学段层面。首先，理论和应用层面。第一，理论层面。我国大概是从 20 世纪 90 年代开始对 APOS 理论展开研究，张奠宙在《数学教育概论》一书中，我国开始对该理论有了初步的认识；乔连全老师在 APOS: 一种建构主义的数学学习理论一文中提到，如果在数学学习中能够引导学生在知识学习时经过思维的操作阶段，刺激学生的思考形成过程阶

段，对新学习的整体知识加以运用，在这些基础上帮助学生形成图式从而理清问题情境、顺利解决问题，让我们对该理论有了更清晰的认识；^①随后许多学者都对 APOS 理论阶段进行了详细的阐述。第二，应用层面。国内对 APOS 理论的研究主要集中在数学的研究上，但是在物理、化学、生物等教育领域也都有涉及，比如在物理领域，有刘稳华的《APOS 理论对物理教学的启示》，在化学领域，有田雅芬的《基于 APOS 理论的中学化学概念教学研究》，在生物领域，有徐嘉婕的《基于 APOS 理论的高中生物学核心概念教学的应用研究》以及张彩云等人的《基于 APOS 理论的生物学概念教学——以“基因突变”为例》。

其次，按学段划分，有小学阶段、中学阶段、高等教育阶段。小学阶段有一些学者对 APOS 理论进行了探讨，在知网上对其进行检索，发现将 APOS 理论应用于小学阶段的数量偏少，在硕博论文中检索仅仅有 6 篇关于 APOS 理论应用于小学阶段的论文，且以某一课为例，很少有案例研究。我国对于 APOS 理论的研究成果在中学阶段相比于小学等其他阶段要丰富一些，在中学阶段的研究成果中，也有很多不同的视角进行研究分析。比如，有的一些研究将 APOS 理论应用于实践中，通过整个研究想要告诉教育者们如何将 APOS 理论层面的知识转化为实际的操作，并且还会通过问卷调查以及进行教学设计，为寻找更加适合中学阶段概念教学方式提供参考；再比如，有的研究者试图将 APOS 理论借鉴过来，设计出一套新的教学模式以供大家参考，并且再将我们现有的传统的教学模式与 APOS 理论指导下的教学模式在相同的课程不同的班级中进行比较，最终对 APOS 理论视角下的新的教学模式进行优化，帮助教师们更好的促进学生的学习；再比如上海师范大学的朱慧敏，利用 APOS 理论进行数学概念教学设计，她通过收集多个案例，从中选取出典型的案例进行分析对比，最终从这多个典型案例中得出一整套的教学设计的范式以供教师参考，这些范式帮助教师从中吸取经验，在此基础上改变自己原有的不足之处，使得教师有效教学，学生高效学习。APOS 理论本身就是针对高等数学的概念学习所提出的理论，不管是在国外还是在国内都被高校充分的运用，在我国的高等数学教育上，高等数学的学习成为我国很多高校学生学习的“灾难”，有的高校为了提高学生在学习高数时的自我效能感，提高学生的高等数学考试的通过率，开始采用降低高等数学知识的难度，因此在基础上，有的研究者对 APOS 理论下的高等数学进行改革试验研究，将传统的教学与 APOS 理论指导下的高等数学的教学进行比较，最终发现 APOS 理论指导下的高等数学学习的优势，同时也根据这些优势对传统的高等数学教学进行了改革，使

^① 乔连全. APOS:一种建构主义的数学学习理论. 全球教育展望, 2001, 03, 16-18.

得高等数学的教学在不降低知识难度的基础上让学生更有效的学习，帮助教师以学生能够理解的方式进行教学，也帮助学生更好的学习高等数学。有的研究者用 APOS 理论对高等数学的微积分的学习进行指导，旨在帮助学生更好的理解高等教育中微积分的概念，更好的帮助高校学生学好高等数学。

综上所述，APOS 理论不论是在国内还是在国外，不论是在理论层面还是在应用层面，不论是在高等教育阶段还是基础教育阶段其研究都已取得了显著的成就。但是我国小学阶段将 APOS 理论与数学概念教学结合起来的研究还是比较少的，因此，这也为本论文提供了研究的空间。

1.4 研究目的、内容、方法

1.4.1 研究目的

我国教育长期处于应试教育的压力下，虽然从国家到地方一直都对这种教育环境提出新的政策并且积极倡导改革，但是其中的问题仍然存在。比如，家长只关心孩子的成绩高低，教师只关注教会学生如何解题，因此不管是在学校还在家里教师和家长都是将数学概念生硬的讲解给学生，让他们死记硬背，从不关心学生对于概念是否理解掌握，忽视概念的学习，只讲解题目，导致现在“孩子不写作业时母慈子孝，一写作业鸡飞狗跳”，纵观其原因是在写作业时难以将概念进行整体地、准确地应用，对概念掌握不清，不能达到真正理解，造成学生对概念理解的模糊态，对数学中的算法、定理、原则、公式等都是知其然不知其所以然，概念就像是一座大楼的基石，小学数学概念更是基石中的基石，如果基石打的不够稳，盖的再高再漂亮都是徒劳无功，因此，概念理解不够透彻就会造成在做题时不知道该怎么做，成绩就不会高，一次次的低分造成学生对数学产生厌恶，不再热爱数学，对数学学习也就产生一系列的消极影响，产生习得性无助效应，因而在这种情况下提出数学概念教学。

其次，数学概念具有客观性、抽象性、枯燥、笼统、复杂等特点，纵观这些特点都呈现出一个大的特征，就是与小学生的思维发展不符合，小学阶段的学生思维尚处于具体形象思维阶段，即便是高段学生的抽象思维也是需要依赖于一定的物质基础，但是概念的学习深刻影响着之后的学习发展，因此本论文主要依托于 APOS 理论对几个教学案例进行分析从而对小学阶段的概念教学有一些启示，在其中寻求一些经验，以帮助更多的教师通过概念教学促进学生的发展。

1.4.2 研究内容

小学阶段的概念具有抽象性，而小学生的思维发展还尚未达到真正的抽象思维，因此应该探求一种能被小学生能理解的方式进行教学。

本文研究首先是提出 APOS 理论视角下小学数学概念教学提出的原因以及理论实践意义；二是关于 APOS 理论基础的研究，通过分析小学阶段数学概念的特征以及小学生的思维发展特点，对 APOS 理论应用到小学数学概念教学中的可行性进行分析；第三是选取了三个比较特殊的案例进行分析，通过运用 APOS 理论来分析这三个教学案例，第四部分是通过案例的分析进行总结反思，为以后的小学数学概念教学提供一些建议以及本论文的研究结论和不足之处。

1.4.3 研究方法

1.4.3.1 文献研究法

对国内外相关文献的检索、甄别、整合、梳理和概括以及对资料的分析研究后，提炼了小学生的思维发展的特点、小学数学概念的特征、数学概念教学的发展阶段和 APOS 理论。尤其是在梳理各位学者、专家所提出的用 APOS 理论进行数学概念教学的意见时，给了我很大的触动，这些都对本论文的写作起到了很大的帮助，同时在这个过程中也形成了一些自己的理解与想法，促使我能够完成本论文的写作。

1.4.3.2 案例分析法

本论文主要采用案例分析法，在 XX 小学实习过程中通过听课，参与数学教研活动收集了共 138 则课堂实录，在其中选取了三个较有代表性的案例写在第四章中，这三个案例分别是《小数的意义》、《认识克》、《复式统计表》，这三个案例按照 APOS 理论各个阶段展开阐述，选取这三个案例的原因是：

《小数的意义》是一个对概念教学有研究的国家优秀教师所讲，其精心的设计能够紧紧的抓住学生的眼球；《认识克》是由一位青年教师所讲，她在整节课中将亲身感受贯穿其中，非常符合小学生的发展特点，而且学生对于知识的掌握反馈良好；《复式统计表》是一节看上去并不像有概念的概念课，但是我国著名数学特级教师邱兴华认为统计图概念也是种概念，该案例整个教学以润物细无声的知识渗透以及对于问题的巧妙设计让学生沉浸在知识的探究中。三个案例各有各的不同，但是又有一定的相似之处，通过对相似之处的分析得出一些经验总结，希望给小学数学教师在进行概念教学时以一定的启示。

1.4.3.3 访谈法

在实习过程中对五年级的数学老师进行访谈，大概内容主要是他们对概念教学的认识、自己的课堂中是否会进行概念教学以及是否知道 APOS 理论等，从访谈中得

知所有的教师都认为概念在数学知识的学习中起着举足轻重的作用，但是他们不知道自己在教学中进行概念教学时，学生们是否能够真正的理解，是否达到了能够对概念进行正确运用的阶段，在本文中的三位教师进行访谈时，他们都表示不知道 APOS 理论，但是他们的课堂却又表现 APOS 理论的特性，这也为本研究提供了一些研究材料，更加能够对 APOS 理论应用于小学数学概念教学提供可能性。

1.4.3.4 课堂观察法

研究者在课堂上两方面进行观察，一方面是通过对学生上课时的积极性、脸上的表情、回答问题的准确率、回答的快慢以及上课时的身体姿态判断他们是否在思考，是否对概念掌握，以及练习巩固题的正确率进行观察分析；另一方面是观察教师如何进行概念的讲解，教师在上课时的语气语态、与学生的互动、是否进行有效提问、是否在关键知识进行提问以及提问能够激起学生的积极性等方面进行观察。

1.5 相关概念

1.5.1 数学概念含义

界定数学概念，首先应先理清什么是概念，在此基础上再进一步说明数学概念的含义。哲学、逻辑学、心理学和语言学等许多学科都对概念有所研究，在哲学家看来，“概念是事物本质特征的反映，是逻辑思维的最基本的元形式”；逻辑学认为“概念是一种反映对象或属性的思维形式，具有恒定的内涵和外延”；^①心理学认为“概念是对事物本质属性的反映，是在感觉和知觉基础上产生的对事物的概念性认识，也就是说概念来源于感官，同时又是对多重感官的一种抽象，比如，‘圆’的概念，生活中有许多圆的形状、物体，然后人们逐步抽象成关于圆的形状。”“概念不是由感官所获得的知识，而是经过知觉印象处理的结果，比如一只羊、一匹马、一个人都可以由感觉直接获知，但它并不是一个概念，而是通过知觉印象后，形成了‘1’这个概念。”“概念是具有某个或某些共同属性和特征的复合，并且是具有这些共同属性的内部的、心理的表象。”

巴塞罗（1992）认为：“概念是一种能够使人们区别出属于某一类别的成员和不属于该类成员的信息”；孔凡哲、曾峥教授认为：“数学概念是反应事物在空间形式与数学关系方面的关键属性或本质属性的基本单位”；李善良在《现代认知观下的数学概念学习与教学》中总结出：“数学概念是对数学对象本质属性的反映，是学生不断感知经验的活动过程，是主体对客体的不断加工、修正，最终达到主体

^① 裘红明, 吴道春, 夏金芝. 数学概念学习探究. 成都大学学报(教育科学版), 2008, 05, 70-72.

对客体的构建过程”；^①十三院校编的教材教法认为：“数学研究的对象是现实世界的空间形式和数量关系，数学概念是反映这些数学对象的本质属性和特征的思维形式”。^②

综上所述，数学概念应该是对现实世界的空间形式和数量关系本质属性和特征的思维形式的反映，是以感知经验为基础，经过思维活动而产生，具有恒定的“内涵”与“外延”，学习者对这个数学对象的不断加工、修正，最终达到学习者对数学对象的构建。

1.5.2 小学数学概念教学

小学，处于义务教育阶段，是基础教育的组成部分。一般6或7岁入学，经历六年的正规学校教育，6-12岁为小学适龄儿童。在小学整个六年中分三个阶段：一年级、二年级叫低年级，三年级、四年级叫中年级，五年级、六年级叫高年级。在小学阶段的学生的思维不同于高中阶段，不管是身体还是心理都与成人具有明显的差异。根据皮亚杰的认知发展理论，小学阶段的学生处于具体运算思维阶段向抽象逻辑思维思维的过渡阶段。

教学，是由教师的教与学生的学共同组成的一种双边认识活动，既不能没有教师的教，也不能全是学生的学，一定是学生通过教师有目的、有计划、有组织的积极引导和培养学生，让学生积极主动的学，让学生作为学习的主体，最终让学生主动掌握系统的知识文化与技能，发展能力，促进学生德智体美方面全面发展。

概念教学，是指教师通过有目的、有计划、有组织的方式，通过调动学生的感知经验从而让学生掌握现实世界空间形式和数量关系本质属性和特征，能够在众多事物中通过本质属性和特征进行区分。

综上所述小学数学概念教学，指小学教师根据小学阶段学生的特点在数学课堂中对此阶段的数学概念以小学生能接受、掌握并且能灵活运用的方式，调动小学生的感知经验，让小学生通过思维的内化，理解概念，掌握概念的“内涵”及“外延，”最终目的是要让小学生能够运用这些数学概念主动建构并形成综合图式。

^① 李善良. 现代知观下的数学概念学习与教学理论研究. 南京, 南京师范大学, 2002, 18-22.

^② 十三院校协编组编. 中学数学教材教法. 北京, 高等教育出版社, 1987, 113.

第二章 APOS 理论对小学数学概念教学的可行性

2.1 理论基础

APOS 理论是美国数学家杜宾斯基在 20 世纪 80 年代提出，对数学概念教学具有指导意义，是一种具有数学学科特色的以建构主义为基础的学习理论，是对皮亚杰关于数学学习过程中个体思维的“自反抽象”理论进行拓展的基础上逐步建立起来的，该理论被誉为近年来数学教育界的最大理论成果之一。该理论刚提出就在美国大学高等数学教学中被广泛的应用，并获得了较大的成功，我国国内数学专家、学者是在 20 世纪 90 年代初对 APOS 理论开始进行研究。

杜宾斯基认为数学概念构建过程主要经历 4 个阶段，操作（Action）阶段、过程（Process）阶段、对象（Object）阶段、图式（Schema）阶段，APOS 理论就是将这四个阶段的首字母合在一起而组成的。^①

2.1.1 操作阶段（Action）

皮亚杰认为，认识一开始并不是起源于感觉和知识，而是由可塑性大的活动本身起中介作用，既然杜宾斯基又认为学生的学习应该是由学生主动建构而不是直接向学生灌输的，那么在这一阶段，学生应该像数学家一样去感受和体验数学概念的形成过程，因此，教师应该尽可能的给学生提供一些活动让学生有初步的对数学概念的感性认识，这个活动既可以是动手操作活动，也可以是内部思维活动。在教师创设情境下，学生通过对某一个数学对象进行操作活动，可以是观察、实验，也可以是猜想、回忆、推理、归纳等，只要是能够让学生通过某个外部刺激不断的进行反省、抽象就可以。需要注意的是，在操作阶段，老师要对学生进行启发点拨，让学生的思维沿着有意义的方向进展，不能随着学生漫无目的的探究，教师要采用不同层次的提问和引导式的教学来培养学生们批判思考的能力。在操作阶段，学生可能并不知道做这些的意义，只是沿着教师的指导方向进行探索，但是这样的动手活动或者是思维活动却能够让学生对新的概念有初步的认识。

2.1.2 过程阶段（Process）

在操作阶段的不断重复的活动，学生开始在头脑中反思，形成属于自己对这个问题的主观认知，学生会在大脑中进行一种内部的心理建构，这就是过程阶段。一般而言，Action 阶段与 Process 阶段并没有明显的划分开，学生在动手操作或者是

^①Dubinsky E, McDonald MA. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. 2001, 7, 275-282.

进行内部思维活动的过程中也在进行着反思，当所反思的与自己所操作的反生矛盾时，就开始了新一轮的动手操作，也就开始了新的反思活动，也就开始了新的过程阶段，一直循环往返，但是这种循环不是简单的“原地”循环，而是上升式的循环，这时教师不断的引导，让学生能够发现操作阶段时那些活动的共同属性，以便于能够自己在头脑中形成对这个概念的认识，如此的操作和反思，再加上教师的不断引导，一个新的数学概念就形成了。

2.1.3 对象阶段 (Object)

学生通过前面的操作阶段、过程阶段对新的数学概念有了解与掌握，这时仅仅在理论上对概念有掌握远远不够，还应该让学生能够将概念作为一个整体加以运用，将概念的整个形成过程作为整体的对象加以运用，并且在运用过程中是以理解的形式运用，而不是“搬”、“套”的形式，当学生能够到达这种程度时，我们就说学生对这个概念的认知已经到了对象阶段。在这个阶段学生将过程阶段的借助具体情境、具体问题的外部刺激变成一个无需外部刺激的阶段，由需要一系列的操作变成一个静态的对象，具有符号化也具有稳定性和独立性。形成对象后，学生可以利用这个对象进行运算、证明等活动。在这个阶段也会存在一些操作活动，但是这个阶段的操作活动目的不是为了寻求它的本质属性，而是利用这整个对象，将这个对象当成一个工具去运用。

2.1.4 图式阶段 (Schema)

“图式”一词是由皮亚杰在认知发展理论中所提出的，他认为图式是人们在认识周围世界时，形成自己独特的认知结构，有组织、可重复的心理结构。任何数学概念在数学知识体系当中都不可能是孤立存在的，它可能是以后知识的基础，也可能是以前知识的深化，因此，在经历了以上三个阶段后，学生在教师的指导下，通过让学生自己探索的方式，主动的将所学的新的概念与原有的知识联系起来，这也就形成了学生自身独有的认知结构，由于个体差异性以及不同的知识也是需要学生自己进行组织安排，因此学生与学生之间的认知结构不会相同。在这个过程中新概念与自己原有的认知结构中有关的部分进行整合，或者当原有的认知结构与其发生冲突时，调整原有的认知结构，形成新的认知结构，也就是形成了一个图式。这个图式既是这个新的概念的建构结果，也可作为下一数学概念或者是数学知识建构的新的材料。这个阶段是需要经过长期的学习活动不断完善的，并且是以一种润物细无声的方式形成的，它是在反复多次的操作、思考、抽象、巩固以及在长期的学习中建立起与其他概念、规则、图形等的联系而形成的，并不是在一次的联系中就可

以得到，且在这个过程中心理图式也在不断的完善。它可以决定某些问题或者某类问题是否符合这个其中某个小图式，对其作出判断。同时整个图式阶段也是符合《义务教育数学课程标准（2011 版）》的要求的，要在整体知识构架中优化知识的结构，处理好知识间的关系，从而引导学生轻松把握数学知识的整体性。



图 2. 1 APOS 理论阶段模型示意图

APOS 理论的这四各阶段具有顺序性且每一个阶段都不可被跨越，否则会影响学生对概念的理解与认识。首先，在操作阶段时，教师给学生提供一个活动，或是动手操作或是思维操作活动，但是这个活动能亲身体验概念产生的合理性，让学生知道每一个数学概念的真正掌握都不是靠突发奇想而学习到的。因此在这阶段，教师要尽可能的选择一些感性的材料，适合小学生认知水平的，能够调动起小学生旧知识的一些材料。有人认为在学习概念时候，可以跨越 APOS 理论阶段中的过程阶段，但是数学概念一定要让学生先经过一定的感知，并且进行编码与信息加工，然后在头脑中对操作阶段的活动进行思考反思，在思考中反思，再重复活动进行验证，最终才能让学生对事物进行抽象概括，因此过程阶段不可逾越。但是也不能仅仅停留在过程阶段，学生了解了概念的形成过程，并且掌握了事物的本质后，这仅仅是停留在理论层面，概念学习的最终是要让学生能够对概念进行运用，并且能够在运用中找出自身对知识掌握的不足点，再对概念进行复习，不断的进行完善。因此学生要利用这个概念对象解决问题参与更高级的运算，解决实际问题，应用于实际生活中，这时完整的理解才能真正的成型。学生在这时会不自觉建立起新概念与相关知识的联系，调整自己原有的认知结构，形成新的图式。但是整个建构过程并不一定沿着这个阶段顺序而发展，比如当学生已经到了过程阶段，但是发现错误，可能又重新返回到操作阶段，这四个阶段也并非一定要在一节数学课中全部呈现出来。

2. 2APOS 理论对小学数学概念教学的独特价值

高斯曾指出，在整个数学学习中重要的并不是符号，而是数学概念知识。整个的数学学习过程本质上就是一个不断运用数学概念进行比较、分析、综合、概括、

判断、推理的思维过程，可以说数学概念就是数学知识体系的细胞，是数学知识的核心，是数学知识的灵魂。

2.2.1 小学数学概念的特点

2.2.1.1 小学阶段的数学概念具有抽象性与枯燥性。

数学概念就是代表了一类事物的本质属性，是对人类世界的一种概括，并且语言具有形式化，所以数学概念总体上呈现抽象性。即便是小学阶段的数学概念，也要给小学生以语言文字的方式讲清楚这类事物的本质属性，因此，小学阶段的数学概念呈现出一种抽象性。概念是要给学生揭示出事物的本质属性，而且纵观我们从小至今所学的所有概念，都具有枯燥性这一本质的特征，甚至很多概念是晦涩难懂的，我们成人有时候都难以理解某个概念所给出的字面意思，需要借助一定的社会经验才能明白，因此小学阶段的数学概念不仅仅具有抽象性，而且具有枯燥性。

2.2.1.2 小学阶段的数学概念具有逻辑联系性。

许多数学概念是在原始概念的基础上派生出而形成的。在某一原始概念下有诸多的下位概念，由此形成了一个结构严谨的概念体系，清晰的表达出概念之间的逻辑关系联系。

2.2.1.3 小学阶段的数学概念具有发展的阶段性。

小学阶段的数学概念的建立大部分都是立足于观察和不完全归纳等途径建立起来的，因此小学阶段的数学概念是片面性的真理，其数学概念会随着学生的年龄和认知水平，发现原来的数学概念是“拟经验的”；其次，发展的阶段性还体现在螺旋式的上升，比如苏教版小学数学在三年级下册时学习了小数的初步认识，在五年级上册时再次学习小数的意义。

2.2.1.4 小学阶段的数学概念大多需要形象或表象的支撑

由于小学生的认知特征，所以在教材上的绝大部分的概念都是采用情景导入，这也给了许多小学数学老师启示，在教概念时，用实物、图片、动作等引入，这也启示我们要用教材，但是不能唯教材论，让教材为我所用。

2.2.2 APOS 理论对小学数学概念教学的适切性分析

2.2.2.1 APOS 理论有利于学生对知识的建构

即便学生所学的所有知识都是基于前人的知识经验，所学的都是间接经验，虽然已经是前人建构好的，但是在学生面前仍然是陌生的、全新的。如果想要让学生真正的掌握知识，最好的方式就是再现类似于前人概念形成的过程。APOS 理论的操作阶段通过恰当的引入，加上对知识背景的介绍，可以给学生重现知识形成的过程，

让学生投入到真实的情景中，让学生以前人的角色参与到知识形成过程中，激发起学生的学习兴趣，并对活动进行思考反思，也可进行小组活动、小组合作研究等，这能够使问题更加深入，对知识的理解更加透彻，当学生真是的将书本中的知识内化为自己的知识时，就能在下一次遇见与此有关系的知识主动的将其纳入认知结构，学生通过这种积极主动的思维活动自觉的理解和掌握数学概念，以此学生慢慢的会主动构建起属于自己的数学知识，而不是背诵书本上的概念。

2.2.2.2 APOS 理论有利于化抽象为具体、化难为易

由于数学概念的复杂性、抽象性等特征以及小学生的思维发展特点，会让很多小学生觉得数学的学习枯燥乏味，进而提不起兴趣，最终导致学生不喜欢学习数学、觉得数学难，成绩慢慢下降，加之不正确的归因，可能会让学生形成习得性无助的自我感觉。而 APOS 理论本质是面向学生，让学生主动学习和主动建构，在操作阶段，教师呈现一些与学生实际生活相关的情景，用科学的方式引入，将学生的实际生活经验调动起来融入到数学概念的学习中去，这样就将抽象的数学概念变成简单易懂的生活数学知识，将难以理解枯燥的数学知识变得让学生感兴趣，并且将数学知识与生活联系起来，，调动起学生的学习兴趣以及提高学生日后解决问题的能力，因此如果教师正确的使用 APOS 理论在一定程度上可以让一些晦涩难以理解的数学概念更加简单直观些。活动的设计能够让学生置身其中，可以将抽象的数学具体化。

2.2.2.3 APOS 理论有利于增大课堂容量，提高教学和学习效率

随着数学新课程改革的不断深入，对数学知识的质量和数量的要求也越来越高，这也给数学老师带来了很大的压力，在这种情况下，如果教师在课堂上开始对学生灌输大量的知识，教师只求自己的输出，而不顾学生的输入，最终只会是适得其反，不但没有掌握知识，反而会对数学产生厌烦感，在这种情况下如何能够让学生学的更好的情况下还能完成教学任务呢？而 APOS 理论是一种与建构主义相关的理论，强调学生在概念学习的过程中要通过主动的探索 and 发现将知识建构起来，进行更深层次的思考和数学思维的进一步升华。教的再多也不如乐学重要，在枯燥无味的数学概念面前，探索一种能够让学生乐学的方式至关重要，而 APOS 理论正好可以在小学数学概念教学时做到这一点。这样不仅仅能够提高教师的教学效率，更重要的是能提高学生的学习效率。

小学阶段是学生学习数学的起始阶段，根据皮亚杰的认知发展阶段论，小学阶段的学生正处于具体运算阶段，这个阶段学生的思维虽然已经具有多维性、可逆性和动态性，掌握了一定的逻辑运算能力，但是仍然需要具体事物的支撑，还不能进

行高阶抽象思维，因此，在这一阶段的学生应多做事实性的、技能性的训练。小学阶段的数学具有抽象性，此时与小学生的认知特点产生矛盾，但是小学阶段的数学概念又具有重要性，这就要求教师寻求一条更好的道路让小学生理解概念，而 APOS 理论不失为一种好的途径，它的操作阶段适合小学生的认知发展，从感知经验为基础，激起小学生的学习积极性，在过程阶段思考，符合小学生的多维性、可逆性、动态性等的思维水平，在对象阶段，小学生将概念看做一个整体进行应用，在一次次的练习、加工、修正的过程中真正的识别这一概念，在图式阶段，在头脑中与原有的相关概念进行整合，建构出新的图式。因此 APOS 理论不管是对小学数学概念教学的意义还是適切性都是具有可行性的。

第三章 小学数学概念教学案例的 APOS 理论阶段分析

《义务教育数学课程标准（2011 年版）》明确指出，数学概念是整个数学的生长点，它的重要性不仅仅停留在理论层面上的揭示事物的本质属性，而且也体现在应用层面，比如当学生在计算 $3+4\times 8-10\div 2=(\quad)$ 时，有些学生计算结果为 23，当对这些学生进行谈话询问其计算方式时，他们说“我是按顺序进行计算，先计算 $3+4=7$ ，再计算 $7\times 8=56$ ，用 $56-10=46$ ，最后 $46\div 2=23$ 。”有的学生的错误为前半部分 $3+4\times 8$ 可以正确的计算出，但是接下来变成用 35 直接减去 10，再算除法。在整个计算过程中先算乘除法，再算加减法，这是受具体算法支撑的，而这个算法就是一个数学概念，很多学生做错很大程度的原因是因为四则运算法则没有真正的理解掌握，所以才会导致这类问题的出现。再比如，当学生计算 $1.2+3.14=(\quad)$ 时，常常会计算出 3.26 的结果，这是因为学生列竖式时将 1.2 与 3.14 两个小数的小数末位对齐，这类错误尤其是在学习了两位小数相乘后变得增多，小数加法与小数乘法的计算法则相混，学生没有区分两者之间的不同，导致错误率上升。因此为了让学生能够真正的理解概念，掌握概念的本质属性，辨别相似的概念，形成知识结构，本文对在 XX 小学实习这段期间的三节典型课程进行分析，发现这三节课有其相似之处，都是在 APOS 理论视角下进行的教学。

本文选取的 XX 小学实习期间的三则典型案例，是基于两种原因，第一种是以邱兴华教授对小学数学概念的分类为准则，第二种是因为三位教师的原因。三则案例中根据邱兴华教授的分类，分别选取一则数概念、一则量的概念、一则统计图概念，数概念是小学生接触的最多的，从小学生上学的第一天，甚至是还未上学时就已经开始学习，量概念是一种较为抽象的概念，这种无法用语言说出的概念该如何讲解进而培养学生的抽象思维能力，一则是统计图概念，培养学生的分类概括能力。

这三节课分别是苏教版五年级上册《小数的意义》，这节课的授课教师为 S 教师，SX 省特级教师，国家优秀教师，全国教学大赛一等奖获得者，对概念教学深有研究，经常被邀做讲座，曾专门做过关于概念教学的讲座，课上 S 教师用生动形象有趣的语言调动学生的课堂积极性，用其他数学教师不敢采用的大胆授课方式让学生理解概念。这节课其实并没有什么难度，知识在学生原来的基础上做了延伸，将学生原本就知道的 $\frac{1}{10}=0.1$ 延伸为“当分母是 10、100、1000 这样的分数时可以用小数表示，一位小数表示十分之几，两位小数表示百分之几，三位小数表示千分之几”，

但是它之所以成为本研究中的一个案例是因为本课结束后对 S 教师进行访谈，询问本节课所学的意义在哪里，他告诉我：“之前所学是初步认识，是认识课，而现在我们学习的是意义，是节概念课，五年级要转化为数学概念，这节课主要是要让他们形成当分母是 10、100、1000 这样的分数时都可以用小数表示，一位小数表示十分之几，两位小数表示百分之几，三位小数表示千分之几等等这样的概念。”S 教师坦言跟我说，这节课是节很典型的概念课，一定要让学生由原先的知识作为延伸点，将之前的知识都归总起来，在这节课上形成真正意义上的概念。

第二节课是苏教版三年级上册《认识克》，授课教师为 W 教师，选取这则案例的原因是该教师是位青年教师，在 SX 省青年教师教学能手比赛上一举夺冠，获得当时评委的一致好评，也被 XX 小学的许多教师称赞她，由一个众人不知的默默无闻的教师成为众所周知的教师，《认识克》这节课中，教师让学生一直处于活动中，让学生在活动中思考，学生们的思维和情绪一直都被该教师调动着，W 教师全程都很稳重，把握着整个教学过程的节奏，教学设计也很新颖独特，让学生们在亲身经历重量中感受概念，最后形成概念。希望能够给更多教师以启示，在进行概念教学时，一定要从学生身边的感性材料入手让学生感受，教师一定要有观察发现的能力，身边的很多小事物都可能是教学中的最佳工具的选择。

最后一节课是苏教版五年级上册《复式统计表》，授课教师为 L 教师，之所以选这个案例是因为，本节课由教师引起学生的认知冲突，然后学生在这种好奇下进行探究，引起了学生的求知欲，课上所有的知识内容都是由学生以合作的形式探究得出的，不管是如何做复式统计图，还是复式统计图的优点全部由学生探究得出，完完全全的以教师为主导，以学生为主体。

之前在访谈过程中三位老师表示都很看重概念在数学学习中的重要作用但是他们都不知道 APOS 理论阶段；在对三个案例进行分析时，发现虽然他们不知道 APOS 理论，但是他们三位教师在授课过程中几乎完全参照 APOS 理论的四阶段模型帮助学生掌握概念知识，并且通过这样的概念教学，学生更加容易掌握概念知识且不容易遗忘，对于他们基础知识的形成很有帮助。

3.1 小学数学概念在 APOS 理论视角下的操作阶段案例及分析

3.1.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》

3.1.1.1 案例过程

表 3.1 操作阶段案例一

课堂实录	分析
师：“关于小数，大家都知道些什么？” 生1：“零点几就是十分之几。” 生2：“小数包括整数部分、小数点和小数部分。” 师：“现在我将一米平均分为十份，一份是多少分米？” 生：“一分米” 师：“一分米占一米的几分之几？” 生：“$\frac{1}{10}$米” 师：“也就是几点几米？” 生：“0.1米” S 教师让学生们了解小数点表示的发展历程。 师：“我们的祖先用结绳计数法，当满十个时就系一个疙瘩，十个又满了时再系一个大疙瘩，但是会出现不够1的情况，这个时候我们的祖先就用△表示比1小的数字，用◇表示更小的数字。那个时候大家都是用这样的固定位置，固定的符号所表示，当阿拉伯数字出来	S 老师用高昂的声音，渴求得到全班一致的正确回答的神情以及加上手势来问出这句话，小学生的注意力难以一下从课下的自由转换到课堂上的集中，因此当 S 教师以这样的神态作为课的开始时，小学生们也会跟着教师这样具有积极性和热情，在上课的一开始就能让学生立即投入到课堂中。 在苏教版三年级下册中已经学过 $1 \text{ 分米} = \frac{1}{10} \text{ 米} = 0.1 \text{ 米}$，让学生回忆这些知识。 S 教师作为一名全国优秀以及对概念教学有所研究的教师，不仅仅注重每节课新知的引入形式，教学方式的使用等，还很注重让学生了解每个知识的形成过程，比如在这节课中，S 教师就让学生们了解了古代人是如何表示小数的，在这个过程中，学生们不仅仅是个学习者，也是个创造者，他们在

以后，就开始用数字表示，用数字表示的话如果不把小数点前面与后面的区分开来，就很容易看错，于是，他们开始寻找一种方式将两者区分开，有的人用“ ”表示，这很容易看成数字 1，有的人用‘，’这个表示，但是最后一个印度的数学家统一规定了一种符号，就是“.”这个符号，我们叫它为小数点。”	听 S 教师说这些时，学生兴致勃勃的听着，并且积极举手想要说出自己的想法，仿佛将学生带入到了那个时代，数学学习不能让学生丧失了学习的乐趣，因此采用这种方式让学生对本节课的知识更加想要探索，也更加了解小数，事实上学生们在整节课中都表现出具有很高的学习积极性。
---	--

3.1.1.2 案例分析

学生在三年级的时候已经学习过“小数的初步认识”，上课开始老师问“关于小数大家都知道些什么”以激起学生的回忆，虽然这个问题看似很普通，也很无趣，但是如果配以老师的动作、神情、语气、语态等，就会产生不一样的效果，这位 S 教师，是一位雷厉风行，每天都很活跃，感觉有用不完的精力，因此这句话在说出时的力量，让我不禁也开始回忆关于小数的知识。S 教师没有采用动手操作活动，而是选择了思维操作活动，让学生进行思维的内部活动，学生在受到 S 老师的外部刺激后开始回忆小数，而且学生在 S 教师的引导下能够根据想起分数与小数的联系。接下来老师用回忆的方式引导学生想起 $\frac{1}{10}$ 这个分数与 0.1 这个小数之间的关系，也就是让学生的认知里重新巩固了遍分数与小数之间其实是有关系的。同时在时隔接近两年的时间里，学生也会形成新的认知经验，会产生一些新的关于小数的知识，产生对已有问题的新思考。同时 S 教师还给学生们讲解了小数如何表示的历史形成过程，学生在这个过程中真正的站在了前人的角度上去体验这个概念的形成过程，可以看出学生在听历史形成过程中所表现出来的兴奋，每个人都想表达自己如果是古人会怎么表示，以此激发起学生的学习兴趣。

3.1.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》

3.1.2.1 案例过程

表 3. 2 操作阶段案例二

课堂实录	分析
------	----

W 教师上课一开始就帮助学生复习上节课 1kg 的重量，拿出一罐 1kg 重量的奶粉让每个学生都感受了一下 1kg 到底有多重。随后 W 教师又拿出一盒奥利奥饼干，让学生感受了一下奥利奥饼干的重量。 师：“你们觉得奥利奥饼干能用‘千克’这样的重量单位来表示吗？” 大部分学生说不能，但是有的学生回答可以用几点几千克表示。W 教师这时直接引出“奥利奥的袋子上面写着净含量 90g，这个 90g 是什么意思？” 生：“去除外面的袋子奥利奥重 90g。” 为了让学生们能真正的掌握“克”，W 教师让学生用黄豆放在称上，先称出 10g 的重量的黄豆，再计算出 1g 重量大概是几颗小黄豆，最后给每个学生发 1g 重量的黄豆，也就是 5 颗黄豆让学生感受其重量。 当学生们掌握了“克”这一概念时，W 教师又拿出两个 500g 的面包，在称上实际称出 1000g=1kg。	W 教师在这节《认识克》中，采用了大量的亲身体验的活动，不管是对 1kg 的回顾，还是引出“克”的概念，还是让学生感受多重是 1g，以及最后的千克与克之间的关系都是通过让学生实际体验，让学生实际观察的方式，这样通过一系列的外部刺激更能让学生产生内部的思维活动。在整节课中观察学生的面部表情，发现学生们的眼睛时常在转动，他们的整个状态可以看出他们在思考问题而不是在走神，这正是 APOS 理论和概念教学所想要达到的真正促进学生的思考。
--	---

3. 1. 2. 2 案例分析

让学生亲自感受两个重量不同的物品，奥利奥与一千克的奶粉的重量，在上节课认识了千克的基础上，引起学生的认知差异，思考一千克的奶粉可以用千克这一重量单位，那么比一千克奶粉轻的多的奥利奥适合用什么样的单位，学生通过猜想这一心理活动，甚至有举手回答以及迫不及待的脱口而出的一些外部活动，让学生初步感知、亲身体验这一问题，以激发学生的思维，让学生对本节课所学内容产生兴趣，上课的关键是要让学生有意义且主动的学习，这种从一开始就抛出问题给学生，使得本节课是老师引导学生们进行探索，整个教学变成了让学生主动，学生感兴趣的一节课。W 老师给学生们分发黄豆，让学生们亲身感受 1g 的重量，从而使学生们构建出属于学生自己的对于“克”的概念，实现思想上的跨越，将自己心理所想的“几克”的重量压缩成自己思考的对象，这样学生就可以在现场想起学习新知

的必要生活经验，或者强化自己已经具有的但相对比较模糊的经验，学生通过心理上的活动，进一步形成外显动作，如举手想要迫不及待的想要回答自己所知道的，又通过自己的语言内化成自己的思维活动，实现外在与内在的统一，从而自己率先形成“克”的丰富的表象，促进对“克”的概念的形式化的表征。W 教师还用两个 500g 的面包进行实际的操作活动，当 W 教师问道两个 500g 的面包是多重时，学生回答出 1000g，当 W 教师让两个学生对这两个面包进行称重，当他们将其放在称上时，学生惊叹道：“1000g 就是 1kg”，学生们得出的这个结论是通过实际的观察，通过实际的动手操作而得出，最终取得了很好的结果。

3.1.3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》

3.1.3.1 案例过程

表 3.3 操作阶段案例三

课堂实录	分析
上课开始 L 老师先给学生们播放了一段关于自己本校的学生参加社团活动的视频，视频结束后，L 老师出示了一组数据，分别是： 古筝小组：男生 7 人 女生 21 人 葫芦丝小组：男生 17 人 女生 10 人 笛子小组：男生 16 人 女生 6 人 小提琴小组：男生 14 人 女生 16 人 师：“我们以前学过整理数据的方法，还记得吗？” 生 1：“统计表” 生 2：“条形统计表” 师：“对，我们以前学过的统计表叫单式统计表，现在将这组数据整理到单式统计表中。” 当学生们整理好数据后，L 教师开始提问：“笛子小组的男生多少人？葫芦丝小组的女生多少人？参加古筝兴趣小组的人一共有多少？五年级参加兴趣小组的人一共有多少？参加兴趣小组的男生一共有多少人？参加兴趣小组的女生一共有	视频中的人与事学生 们都很熟悉，能紧紧的抓住了学生的注意力，将学生的注意力吸引到课堂中来，增加学生的兴趣，在这节课接下来的学习中学生有欲望继续探求知识。 L 教师以这种在单式统计表中无法一下子看出，学生难以回答上来的方式引起学生的认知冲突，而且，教师从单式统计表向本节课所讲新知内容的过渡方

多少人？” 在前三个问题中学生能回答出来，但是到了第四、五个问题时，学生们都沉默了。 师：“我发现在第四第五个问题大家都沉默了，而且我还发现有的学生在回答前面三个问题时，都还没有找到答案我们就开了下一个问题，即便是有的同学找到了正确答案，但是他的脑袋上下左右晃动着，这是为什么？” 学生们有回答因为他不熟悉表格，有个学生回答表格太多可以合到一个表格中的。 师：“你怎么合在一个表格中呢？”	式具有逻辑性，学生在学习了本节课的复式统计表后不用老师讲解就能知道单式统计表和复式统计表的优点与缺点，学生的认知结构更加有条理也更加清晰。 L 教师问学生“为什么有的同学找不到答案，有的同学脑袋上下左右晃动”，学生开始思考这个问题，并且最终有学生回答出合到一个表格中，接下来如何合在一个表格中又将引起学生的积极思考，一个问题接着一个问题，让学生一直处于一种积极的思考当中。
---	--

3.1.3.2 案例分析

这节课 L 教师对教材进行了改编，教材上的设计是直接给出了单式统计表，而 L 教师考虑到学生可能已经遗忘了单式统计表，并且由单式到复式统计表的过渡的这个过程更能让学生明白二者的优劣之处，该教师用教材，而不是完全的教教材，将教材作为“诱饵”，去“钓”起学生的思考。课的开始，L 教师用自己本校的社团视频引入，已经吸引了学生的注意力，在社团视频播放完之后，出示数据，问学生“关于数据整理的方法，大家是否还记得”，这让学生在自已的大脑中开始回忆自己以前学过关于数据整理的方式，APOS 理论在操作阶段，可以让学生以多种方式进行活动，不管是动手还是动脑，当学生们想起单式统计表后，肯定会在头脑中进行思考“当时的单式统计表填写的规则是什么，表头怎么填写，数据怎么填写，表头与数据之间的关系是什么等等一系列的问题以及答案”，接着 L 教师让学生独立的将数据整理到单式统计表中，从而唤起学生对单式统计表的回忆，为这节课的学习打下了一个基础，也是对后面学习复式统计表建构的起点和生长点。当老师提出一系列的问题后，尤其是参加兴趣班的女生多少人？男生多少人时？引起了学生的认知冲突。当老师继续提问，为什么有的学生回答的慢，就算有的学生回答出来也

是摇头晃脑的，这时 L 教师又向学生抛出一个问题，让学生们探求一种更为方便简洁和全面的一种方式，他们在思维上的活动就开始了，当学生们回答出合在一起时，以及在最开始导入环节，不仅仅是让学生动手操作活动，更重要的是引起了学生思维上的活动。

3.2 小学数学概念在 APOS 理论视角下的过程阶段案例及分析

3.2.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》

3.2.1.1 案例过程

表 3.4 过程阶段案例一

课堂实录	分析
师：“大家看黑板上的图，3 分米等于多少米？” 1分米 $\frac{1}{10}$米 0.1米 3分米 (①)米 (③)米 7分米 (②)米 (④)米 图 3.1 S 教师黑板示意图 生：“$\frac{3}{10}$米。” 师：“$\frac{3}{10}$是几个$\frac{1}{10}$？” 生：“3个。” 师：“1个$\frac{1}{10}$是1个0.1，3个$\frac{1}{10}$有几个0.1？” 生：“3个，所以$\frac{3}{10}$是0.3。” 师：“那么③④处应该填多少？” 生：“$\frac{7}{10}$和0.7。” 师：“我们看规律$\frac{1}{10}=0.1$，$\frac{3}{10}=0.3$，$\frac{7}{10}=0.7$，所以一位小数就表示十分之几。” 师：“教大家一个简单的办法，把分母10倒着写成了01，在第一个0后面加个小数点，成了0.1，	S 教师在操作阶段使学生回忆起 $1 \text{ 分米} = \frac{1}{10} \text{ 米} = 0.1 \text{ 米}$，并以此为认知榜样，让学生推出 3 分米等于几分之米等于零点几米，学生在这个过程中对 $\frac{1}{10}$、$\frac{3}{10}$、0.1、0.3 之间的关系在头脑中进行思考，并且学生在教师的引导下最终在头脑中有了对这些关系的简单认知后，当 S 教师提问③④处应该填什么时，学生齐声大喊出正确的答案，学生在课堂上的状态是积极的、兴奋的。 S 教师作为从教多年的优秀教师，这种将分母倒着写，然后再看分子的这种方式并不是每个数学

现在 $\frac{3}{10}$ ，也用这个办法，先倒着写分母成了 0.1，看分子一共有 3 个 $\frac{1}{10}$ ，也就是有 3 个 0.1，所以就是 0.3。”

师：“如果将 1 米平均分成 100 份，其中一份是多少米？”

生：“ $\frac{1}{100}$ 米。”

师：“能不能将这个改写成小数？”

生：“0.01。”

师：“为什么？”

生：“用刚才老师的那个办法，分母是 100，我倒着写的，先写 001，在第一个 0 后面点小数点，就成了 0.01。”

师：“那 3 厘米是几分之几米？”

生：“ $\frac{3}{100}$ 米，也就是 0.03 米。”

师：“我们刚才说一位小数表示十分之几这个两位小数表示什么？”

生：“百分之几”

师：“那三位小数表示什么？”

生：“千分之几”

师：“那到底小数的意义是什么？”

生：“一位小数表示十分之几，两位小数表示百分之几，三位小数表示千分之几。”

教师都能够在长期的教学中都能观察出的，因此其教学方式与研究教学的能力值得学习。

学生在对 S 教师的方式进行理解后，能够快速

的答出 $\frac{1}{100}=0.01$ ，并且在

有了一位小数表示十分之

几之中概念之后，当教师

问学生们，那么百位小数

表示什么？学生能够快速

的答出，其实在这里学生

已经初步的完成了 APOS

理论的过程阶段，他们能

够根据操作阶段的回忆推

出 $\frac{3}{10}$ 和 $\frac{7}{10}$ 分别用什么小

数可表示出来，又根据一

位小数表示十分之几形成

两位小数表示百分之几的

概念，为了进一步让学生

能够确认这个认知是正确

的，S 教师又对学生们所

说的三位小数表示千分之

几进行了肯定，最终学生

在头脑中抽象出了该概念

的共同属性。

S 教师在这里又对学

生现已形成的概念抽取出

师：“ $\frac{1}{30}$ 用今天所学的概念能不能表示一个一位或者两位小数？”	其本质的属性，让学生们明白并不是所有的分数都可以以这样的形式表示出来，更加确定了该概念。
生：“不能的，只有分母是 10、100、1000、10000……这样的分数才可以。”	

3.2.1.2 案例分析

S 老师在操作阶段让学生回忆 $\frac{1}{10}=0.1$ ，接着引导学生思考 $\frac{3}{10}$ 与 $\frac{1}{10}$ 之间的关系，当学生根据以前的认知想到 $\frac{3}{10}$ 就是 3 个 $\frac{1}{10}$ 时，也就知道了 $\frac{3}{10}$ 就是 3 个 0.1，也就是 0.3，用同样的思路学生自然也就知道了 $\frac{7}{10}$ 就是 0.7，并且引出一位小数也就是十分之几的另一种写法，到这里时学生是根据以前的知识在大脑中进行思考活动，对其原有的知识进行压缩和构思，初步的形成了对概念的理解。接下来 S 教师则侧重于引导，而不是教，让学生在一位小数可以表示十分之几的基础上得出 $\frac{1}{100}$ 和 $\frac{3}{100}$ 分别是 0.01 和 0.03，学生们在回答中表现的积极度就能看出来学生已经对分数与小数之间的关系在头脑中有了一定的理解，包括对于接下来的分母是 1000，分母是 10000 时借助这种具体数字的支撑时都能够准确的应答出来，这说明学生已经在头脑中抽象出该概念的共同属性，已经形成了一定的抽象概念，这时 S 教师用 $\frac{1}{30}$ 和本节课所学的做一个区分，最终让学生明白分母是 10、100、1000……这样的分数可以用小数表示，这时教师就帮助学生将概念的共同抽象成概念的本质属性。

3.2.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》

3.2.2.1 案例过程

表 3. 5 过程阶段案例二

课堂实录	分析
当学生们亲身感受了 1kg 奶粉与奥利奥重量后，学生感受到了二者之间的重量差异。	学生感受了 1kg 奶粉与奥利奥的重量，并且当说出净含量为 90g 时，学生对“克”这个概念已经形成了自己的初步认知。当学
师：“奥利奥的袋子上写着净含量 90g，什么是净含量 90g？”	
生：“奥利奥除去外面的袋子重 90g。”	
W 老师在 PPT 上展示出 2 分硬币 1.1g，1 角硬币	

3. 2g, 1 元硬币 6. 1g。 师：“那么 1 克到底有多重？” 为了让学生真正的感受 1g 的重量，W 教师给了每个学生五颗黄豆让其感受，感受结束后 W 教师让学生做题：橡皮筋、橡皮、铅笔屑三个物品比 1g 重还是比 1g 轻？ 生：“橡皮筋比 1g 轻。” 师：“那橡皮筋是比 1g 轻的多还是轻一些？” 生：“轻一些。” 生：“橡皮比 1g 重很多，铅笔屑比 1g 轻一些。” W 教师拿出两个都是 500g 的面包，学生就急于说两个面包加起来是 1000g，教师又将两个面包放在称上称正好是 1kg，学生得知 $1000g=1kg$。	生握着 5 颗黄豆感受 1g 的重量时，学生又对“克”的概念形成了更加具体形象的认知，当学生能准确的判断出橡皮筋、橡皮和铅笔屑比 1g 轻还是重时其实已经初步的掌握了属于自己的“克”的概念。最后 W 教师又通过两个 500g 面包得出千克与克之间的关系，学生通过外部的刺激内化为自己的具体思维，形成“克”的概念。
--	---

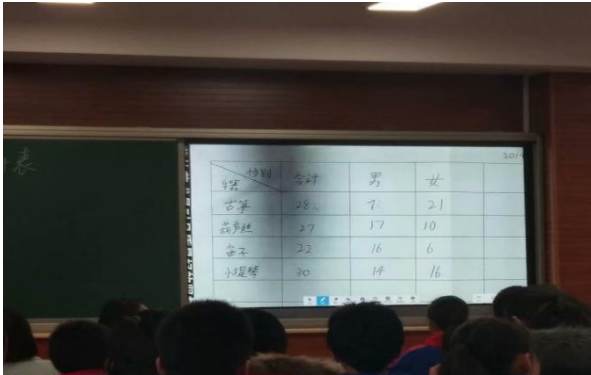
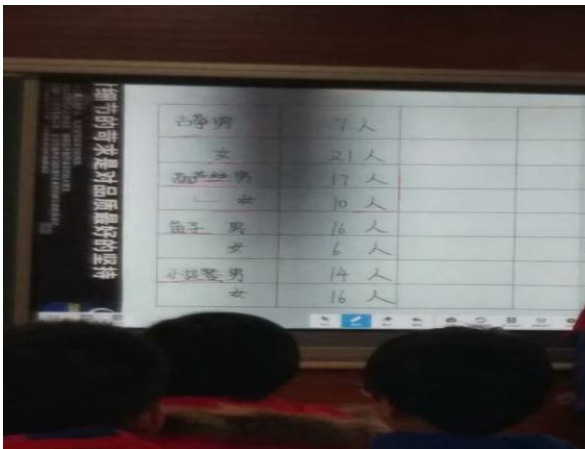
3. 2. 2. 2 案例分析

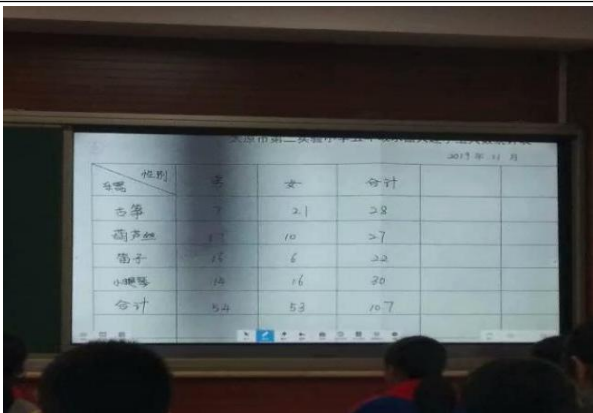
老师用奥利奥、用 5 颗黄豆为 1 克重等让学生亲身感受重量，在经历了这些实际活动后，学生在大脑中开始对克这一概念进行反思，最终构建出关于“克”的独立完整概念。老师会提问学生，学生在回答问题之前要对这个问题进行思考，比如在用黄豆感受了 1 克的重量后，老师问学生橡皮筋比 1 克重还是轻的问题的时候，学生肯定在头脑中认真思考了这一问题，进行了反思活动，将橡皮筋的重量与 5 颗黄豆的重量进行比较，得出要比 1 克轻一些的答案。这就是将在生活中的实例重量与 1 克进行比较分析，归纳出关于“克”的本质的特征。同时在回答问题的时候会将自然语言进行提炼、加工，转化为数学语言，比如，比 1 克要轻一些，比 1 克要重很多等等。这位数学老师在教学中不断营造学习氛围，由于三年级的小学生好奇心求知心比较重，以这种探索的方式让学生集中注意力，W 教师用两个 500g 面包得出 $1000g=1kg$ ，学生先是根据自己以前的认知知道两个 500g 是 1000g，然后当 W 教师将两个 500g 的面包一起放进称里时，学生通过这个活动，明白了 $1000g=1kg$ ，这也就引起了学生的思维内化，既然 $1000g=1kg$ ，那么 $2000g=2kg$ ，他们在大脑中形成了关于“克”与“千克”之间的概念关系。

3. 2. 3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》

3.2.3.1 案例过程

表 3. 6 过程阶段案例三

课堂实录	分析																																
L 教师通过提问一些在单式统计表中无法直接得出答案的问题，引导学生将四个单式统计表合为一个统计表。 五年级古筝兴趣小组人数统计表 2019 年 11 月 <table><tr><th>性别</th><th>合计</th><th>男</th><th>女</th></tr><tr><td>人数</td><td>28</td><td>7</td><td>21</td></tr></table> 五年级葫芦丝兴趣小组人数统计表 2019 年 11 月 <table><tr><th>性别</th><th>合计</th><th>男</th><th>女</th></tr><tr><td>人数</td><td>27</td><td>17</td><td>10</td></tr></table> 五年级笛子兴趣小组人数统计表 2019 年 11 月 <table><tr><th>性别</th><th>合计</th><th>男</th><th>女</th></tr><tr><td>人数</td><td>22</td><td>16</td><td>6</td></tr></table> 五年级小提琴兴趣小组人数统计表 2019 年 11 月 <table><tr><th>性别</th><th>合计</th><th>男</th><th>女</th></tr><tr><td>人数</td><td>30</td><td>14</td><td>16</td></tr></table> 图 3. 2 黑板呈现单式统计表示意图 四个学生为一组，开始了他们的“设计”，十五分钟过后，L 教师分别展示了四组学生的作品，从第一组到第四组分别如下（四幅图见附录一）： 	性别	合计	男	女	人数	28	7	21	性别	合计	男	女	人数	27	17	10	性别	合计	男	女	人数	22	16	6	性别	合计	男	女	人数	30	14	16	从这四组学生的表中，可以发现一组比一组更加完善： 第一组中只是简单的将原单式统计表进行了简单的合计整合，男女各自的数据被删去。 第二组比第一组详细，不仅仅将单式统计表中所设计的都在此表中体现出来，而且在表头中出现了分类思想，将整个表分为横向是性别，纵向是乐器。
性别	合计	男	女																														
人数	28	7	21																														
性别	合计	男	女																														
人数	27	17	10																														
性别	合计	男	女																														
人数	22	16	6																														
性别	合计	男	女																														
人数	30	14	16																														



太原市第二实验小学五年级乐器兴趣小组人数统计表				
2019 年 11 月				
种类 \ 性别	合计/人	男/人	女/人	
古筝	28	7	21	
葫芦丝	27	17	10	
笛子	22	16	6	
小提琴	30	14	16	
总共	107	54	53	

图 3. 3 第一到第四小组探讨复式统计示意图

接着 L 教师又回到原来的问题上，五年级参加兴趣小组的人一共有多少？参加兴趣小组的男生一共有多少人？参加兴趣小组的女生一共有多少人？学生都能快速的回答出来。

师：“现在我们能不能说出复式统计表比单式统计表好在哪里？”

生 1：“有了合计了，看到的信息更多了。”

生 2：“清晰，找数据时更加方便了。”

在老师的不断引导下又继续说出，方便比较和具有全面性。

第三组又比第二组更加详细，在整个表的最下面出现了所有男生的合计，所有女生的合计以及男女生总合计。

第四组相比于第三组又更加完善，表头分为三类，横向为性别，纵向为种类，中间的数据为数量，横向、纵向都有合计。

当学生们通过自己思考，自己动手，自己讨论最终得出复式统计表后，他们更加明确了什么是复式统计表，也更加了解复式统计表的优点。

3. 2. 3. 2 案例分析

当学生们认识到自己以前学过的单式统计表存在一定的缺点时，这就引起了他们的认知冲突，L 老师让学生们以小组为单位进行新的表的设计，学生们的大脑就开始转动，他们在脑中思考如何将这四个单式统计表合在一起呢？他们最终绘制出

了属于他们所思考探究出来的复式统计表，虽然这里学生们进行了动手绘制的操作，但是这是他们思维的结果，是学生们不断的分析、反思，通过思维的内化、整合和压缩而形成的。其实学生的实际绘制表并不是真正的目的，这只是内部意识的一种外部表现，是他们在意识中思考每个操作的程序，这时也不再需要外部的不断刺激。从第一组绘制出的到第四组绘制出的，每一个组都展示出了他们思维的成果，虽然第一组到第三组的并不是那么完善，但是这也是他们思维的结果，是他们在对操作阶段时单式统计表如何合成复式统计表的一个思考过程，从一开始的外部刺激到复式统计表的形成的思维内化和整合，第四组的学生做的比较完善，是因为在课堂上观察到，第四小组在下笔绘制表格之前先经过了小组之间的讨论，小组成员之间先对单式统计表进行了简单的分析，对如何将单式统计表中的数据能全部呈现在复式统计表中在纸张上进行了简单的勾勒，在最后表头的分类中，该组的成员发现横向可以写成性别，纵向可以写成种类，如果仅仅分成两类，中间的数据部分就不能表示出来，于是他们大胆的将表头分成三类，可以看出该组成员思考的要比前三组成员更多，思维的内化和整合也更加的完善，当所有小组都绘制出一份复式统计表后，学生也就将复式统计表从感性上升到理性，对复式统计表形成初步的认识。因此在过程阶段一定要让学生真正的思考起来，真正的能通过外部的刺激达到内部意识的上升。

3.3 小学数学概念在 APOS 理论视角下的对象阶段案例及分析

3.3.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》

3.3.1.1 案例过程

表 3.7 对象阶段案例一

课堂实录	分析
S 教师出示一道练习巩固题，让学生口头回答。 0.108=（ ） 生：“百分之” 当学生刚说出来“百分之”这三个字时 S 老师将其打断 师：“不会看时，我们倒过来看，0001，反过来是 1000 吧？那所以是多少？”	S 教师及时的纠正学生出现的问题，趁热打铁让学生真正的了解问题之处以及真正掌握这个概念。

生：“ $\frac{108}{1000}$ ” 接下来 S 教师又出了两道练习题 $0.042=(\quad)$ $0.0002=(\quad)$ 绝大部分学生做出来。	这两道题由学生自己在课堂上动手做，在学生练习过程中观察学生对于这两道题的正确率达到 92%。
--	--

3.3.1.2 案例分析

学生在掌握了该概念的本质属性后，S 教师的第一道练习题是让学生口头回答的，用这种口头回答的方式更能快速的把握学生的问题所在，当学生们喊出百分之多少时，S 教师快速给他们解决问题，让学生更加深刻的掌握住这个概念，学生在此时只能简单的运用这个概念，而 S 教师出示接下来的两道练习题时，学生们的做题速度提升，而且其正确率也很高，这表明学生在掌握概念的基础上，已经能够将这个概念作为一个整体进行应用，学生将刚才操作阶段外部刺激的需要和过程阶段中思维的内化与整合都作为一个整体意义上的数学对象，将其凝练成了一个整体对象，加以运用，学生们在这个过程中将简单的概念知识不断的巩固和对这个概念进行精加工，形成一个便于日后学习时能够更加容易操作和运用的新的对象，在这时学生看到这两个练习题能够运用小数的意义这个概念进行静态的内部思考，将文字性的概念转化成符号，进行了具有稳定的、独立的活动。慢慢的学生积累的概念变得越来越多，当学生在遇到一个问题时，能够快速的想起运用哪个概念合理的解决这个问题才是对象阶段所要达到的最高标准，其实这需要学生们不断的运用不断的重复。在这个过程中学生的动手操作也不再是 APOS 理论中的操作阶段，不是为了寻求事物的共同属性或者是本质属性，而是将概念作为一个整体的对象加以利用，这时概念便成了一个工具。

3.3.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》

3.3.2.1 案例过程

表 3.8 对象阶段案例二

课堂实录	分析
学生们在手里掂了掂 5 颗黄豆的重量后，W 教师让学生辨析橡皮筋、橡皮和铅笔屑比 1g 重还是轻。当学生们掌握“克”以及 $1000\text{g}=1\text{kg}$ 这两个概念后，W 教师出示练习题： $5\text{kg}=(\quad)\text{g}$ $3000\text{g}=(\quad)\text{kg}$	学生们能够正确的做出这些题，不管是与 1g 比轻重还是千克与克之间的数量关系的转化还是正确对“克”与“千

学生们齐答出正确答案。 师：“我们认识了千克与克，也学会了克与千克的转换，在什么时候用克，什么时候用千克呢？同学们想想我们刚才的五颗黄豆一克的重量和一千克的奶粉的重量，我们尝试着来做几道练习题，到底什么时候用克、什么时候用千克？” 一颗篮球 640（ ） 一个乒乓球 3（ ） 一辆童车 3（ ） 一部手机 85（ ） 一袋面粉 25（ ） 一个冬瓜 10（ ） 一颗鸡蛋 60（ ） 爸爸体重 70（ ） 学生能分别回答出上述每个物品应该使用的正确的重量单位。	克”这两个重量单位的使用，都表明学生已经掌握了“克”的概念，并且能够将这个概念作为一个整体进行运用。
--	---

3.3.2.2 案例分析

当学生们在手里掂了 5 颗黄豆也就是 1g 的重量以后，W 教师立即让学生做练习题，对橡皮筋、橡皮和铅笔屑的比 1g 重还是轻，轻一些还是轻很多进行辨析，W 教师采用让学生亲身体验的方式对“克”这一重量单位的概念进行了解，当亲身感受后，W 教师立刻让学生做题，学生们的正确率很高，说明学生们经过一个外部刺激开始在头脑中进行思维内化，最终在头脑中将 5 颗黄豆的重量与三者物品进行了比较，从而将“克”这个概念又作为一个整体的概念进行运用和准确的辨析。当 W 教师用两个 500g 面包得出 1000g 等于 1kg 后，所做的将克与千克之间进行等量关系转换的练习题以及最后填入合适单位的练习题，都是对“克”进行辨析，学生们通过各种外部刺激逐渐的形成关于“克”这一概念的认知，从而能够将这个概念作为一个整体的对象进行分析，他们会在大脑中先进行判断，这个判断的过程就是将概念作为一个整体的对象进行思考的过程，经过多次的循环反复，对克这一概念属性进行巩固，更确切的理解什么是“克”，能在日常的生活中准确的选择何时用“克，”将“克”作为整体理解，把这一概念压缩成独立对象。

3.3.3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》

3.3.3.1 案例过程

表 3. 9 对象阶段案例三

课堂实录	分析
------	----

L 教师接下来出示了一道练习题进行巩固

后测：

中国体育代表团历届夏季奥运会获得奖牌情况统计表

数量(枚) 奖牌		届次 年份	年 月									
			合计	第23届 1984年	第24届 1988年	第25届 1992年	第26届 1996年	第27届 2000年	第28届 2004年	第29届 2008年	第30届 2012年	第31届 2016年
总计					28	54	50	59	63	100	88	70
金				15	5	16	16	28	32		38	26
银			162	8	11	22	22	16	17	21	27	18
铜			155	9	12	16	12	15	14	28	23	26

1、请将这份复式统计表填写完整。

2、观察历年取得的金牌数，你能预测一下第 32 届中国代表团会取得多少枚金牌吗？你是怎么想的？

图 3. 4 练习巩固题

学生们第一题的正确率以及第二题的部分答案如下图所示，

人 数 类 别	填空栏			
	总计	历届金牌数合计	第23届奖牌数合计	第29届金牌数
正确人数	31	32	42	43
错误人数	13	12	2	1
正确率	70.5%	72.7%	95.5%	97.7%

图 3. 5 练习巩固第一题正确率

2、观察历年取得的金牌数，你能预测一下第32届中国代表团会取得多少枚金牌吗？你是怎么想的？

金：约30枚左右
银：约20~25枚
铜：根据过去每年的趋势来预测的。

2、观察历年取得的金牌数，你能预测一下第32届中国代表团会取得多少枚金牌吗？你是怎么想的？

会取得30~40枚，因为金牌历届的平均数就在这个范围内。

2、观察历年取得的金牌数，你能预测一下第32届中国代表团会取得多少枚金牌吗？你是怎么想的？

自第23届~第31届中国体育代表团获得金牌的平均数来预测第32届的金牌数。

2、观察历年取得的金牌数，你能预测一下第32届中国代表团会取得多少枚金牌吗？你是怎么想的？

可能会取得25~30枚，因为前几次取得金牌数都接近这个范围。

2、观察历年取得的金牌数，你能预测一下第32届中国代表团会取得多少枚金牌吗？你是怎么想的？

30~40枚，因为第31届、32届在30~40之间，距离非常近。

图 3. 6 练习巩固第二题部分答案

当学生们做完这道练习题后，对学生第一题的正确率进行了计算，第23届奖牌数合计和29届金牌数的正确率很高，但是总计和历届金牌数合计比较低，对其进行分析以及再让其中几个学生再做一遍，发现因为这里需要计算的数字多，计算量比较大，而不是学生没有掌握。对于第二题，学生们的都能在一个合理的预测范围内。

3.3.3.2 案例分析

教师在最后练习题的设置中，其实是废了一番心思的，不管是先算金牌的合计还是总计都不能在第一步时算，一定要先算23届的总计或者是29届的金牌数。因

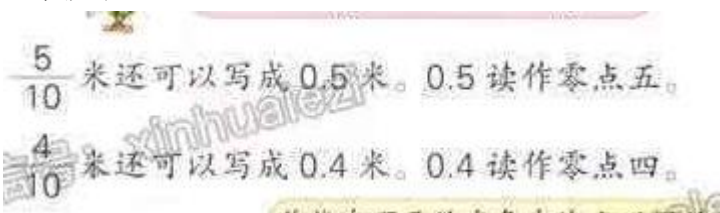
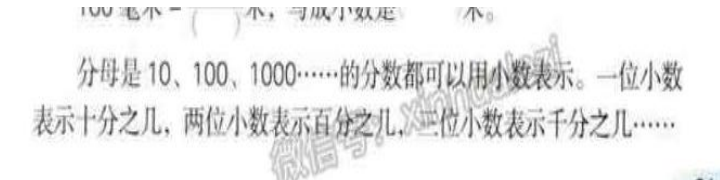
此练习题的第一题的设计稍微带着点“心机”，学生要想算出所有的空缺答案，就必须得真正的掌握这一整节课的知识。在最后对学生正确率的数据统计中表明，学生在“总计”和“历届金牌数合计”这两个的正确率刚达到 70%，而当我们对没有填写正确的学生进行课下了解以及让他们再做一遍的方式发现很大一部分做错的学生并不是不会做，而是由于其数据偏多，因此在计算过程中出现错误；在“23 届奖牌数合计”和“29 届金牌数”中学生的正确率高达 95%以上，因此足以看出学生对这部分只是的掌握。尤其在第二题预测 32 届中国代表团将会取得多少金牌时，学生都能有一个合理的预测，并且陈述出理由。这些第一题分析数据和第二题的答案都表明学生能够将本节课所学的“复式统计图”的概念作为一个整体而运用，能够看懂在一个复式统计图中表头的分类都代表什么，合计如何计算和合计如何检验，并且能够根据表格中的数据进行正确的预测下一届金牌数，这些都表明了学生已经能够将“复式统计图”这个概念作为一个整体的对象正确的解决问题，而且学生在做最后一题的预测时以区间的形式出现，这也表明学生的数感、模型思想已经在思维中慢慢的建立起来，其数感和模型思想学生们已经可以作为一个独立的对象在不知不觉中进行了巧妙的运用。

3.4 小学数学概念在 APOS 理论视角下的图式阶段案例及分析

3.4.1 案例一——苏教版五年级数学上册《小数的意义》

3.4.1.1 案例过程

表 3. 10 图式阶段案例一

三年级时：  图 3. 7 三年级小数的认识 五年级时：  图 3. 8 五年级小数的认识	图 1 是苏教版三年级下册，图二是苏教版五年级上册，可以看出学生在三年级时只是学习了 $\frac{4}{10}$ 可以写成 0.4，$\frac{5}{10}$ 可以写成 0.5，而在五年级时学生学习的是“分母是 10、100……的分数都可以用小数表示，一位小数表示十分之几，两位小数
---	--

	表示百分之几……”这样的概念。
--	-----------------

3.4.1.2 案例分析

就本节课而言，学生在原有三年级仅仅是 $\frac{1}{10}$ 就是 0.1 这样的认知结构，更新为“分母是 10、100、1000 等的分数都可以用小数表示，并且一位小数表示的是十分之几，两位小数表示的是百分之几，三位小数表示的是千分之几”这样的认知结构，由原来的一位小数与十分之几之间的关系变成“小数的意义”这个概念，从而学生三年级时所学的“ $\frac{4}{10}$ 可以写成 0.4， $\frac{5}{10}$ 可以写成 0.5”这样的下位概念融入到五年级学到的“分母是 10、100……的分数都可以用小数表示，一位小数表示十分之几，两位小数表示百分之几……”这样的上位概念中，变成一个整体的概念进行学习，而不是原先的一部分知识的学习，从而形成了一个新的图式，可以看出这个新的图式与之前旧的认知结构之间间隔了将近两年，因此可以看出图式的形成是需要一个长期的过程的，在接下来的长期的数学学习活动中还会形成再更新这个图式，并且学生会将这个概念与之前的、之后的与该概念相关联的其他概念进行相应的整合，当学生在运用这个概念解决实际问题时会单独的拎出来这个概念，这也体现了图式能够对一些与概念相关联的问题是否属于该图式的范围作出判断。

3.4.2 案例二——苏教版三年级数学上册《认识克》

3.4.2.1 案例过程

表 3. 11 图式阶段案例二

认识“千克” 称一般物品有多重，常用千克作单位。千克可以用字母“kg”表示。千克又叫作公斤。 图 3. 9 “认识千克”教材示意图 认识“克”	苏教版关于重量单位的知识一共有三节，第一节是三年级上册的“认识千克”，第二节是三年级上册的“认识克”，第三节是三年级下册的“认识吨”。学生在这三节课中，以及在日常生活中，将会了解到很多关于重量单位的知识，形成关于重量
---	---



图 3. 10 “认识克”教材示意图

单位的图式。

3. 4. 2. 2 案例分析

学生在平时的日常生活中，已经积累了一些关于重量单位的知识，比如“斤”、“两”，他们对于重量单位的认知结构已经有了一个初步的建立，在这节课之前，学生们又学习了“千克”这一概念，同时对于 1kg 有多重也有了具体的认知，学生们在其关于重量的认知结构中又加入“千克”，形成新的图式，当本节课学习完之后，学生们又更新了其认知结构，又形成了有“克”的一个新的图式。当学生们到了四年级后还会学习关于“吨”的概念，如此，学生关于重量单位的图式在不断的更新，不断的将原有的知识内容和新学习到的进行整合从而形成一种新的图式。学生们这节课中还学习了千克与克之间的关系，未来还会学习到千克与吨之间的重量关系，而学生们在日常的生活经验中，由父母家人或者老师告知学生们关于斤与两之间，克与斤之间的关系，这些等量关系又 would 让学生形成不仅仅是在重量单位图式里的重要内容，也可能会形成一个关于各种单位之间进率关系的图式，学生与学生之间的图式结构可能不同，有时候学生组织的图式之间可能会有重复的地方，但是只要能够帮助学生解决问题，能够让学生有逻辑的理解知识内容的都可以形成为图式。

3. 4. 3 案例三——苏教版五年级数学上册《复式统计表》

3. 4. 3. 1 案例过程

表 3. 12 图式阶段案例三

课堂实录	分析
	上课开始时，学生根据自己原有的知识只能绘制出单式统计表（苏教版四年级上册所学），当 L 教师进行适度的引导，学生能够根据自己的知识经验绘制出“复式统

五年级古筝兴趣小组人数统计表			
2019年11月			
性别	合计	男	女
人数	28	7	21

五年级葫芦丝兴趣小组人数统计表			
2019年11月			
性别	合计	男	女
人数	27	17	10

五年级笛子兴趣小组人数统计表			
2019年11月			
性别	合计	男	女
人数	22	16	6

五年级小提琴兴趣小组人数统计表			
2019年11月			
性别	合计	男	女
人数	30	14	16

图 3. 11 单式统计表示意图

太原市第二实验小学五年级乐器兴趣小组人数统计表			
2019年11月			
性别	合计/人	男/人	女/人
古筝	28	7	21
葫芦丝	27	17	10
笛子	22	16	6
小提琴	30	14	16
总共	107	54	53

图 3. 12 第四小组探究的复式统计图

计表”，从本节课的一开始到本节课的学习完以及练习巩固题，学生们对于统计表的认识从原先的仅仅有单式统计表，又加入了复式统计表，学生们的认知结构肯定会随着这节课的学习进行相应的改变。

3. 4. 3. 2 案例分析

苏教版关于数据的整理，在二年级下册时简单的接触过，仅仅是对于数据的简单分类，在三年级下册时学习不同标准的分类得到的数据不同以及可以先分组再汇总等的统计方式，在四年级上册时，第一次接触单式统计表，在五年级上册时，学习了复式统计表。这节课所学的复式统计表，是在二年级和三年级数据分类和四年级时单式统计表的基础上所学的，从这里就可以看出，学生的认知结构在不断的发生着变化，由原先的简单的数据分类到三年级在二年级的基础上学习复杂的数据分类与统计，再到四年级时又在之前的基础上学习单式统计表，最后这节课要在之前的这所有的基础上再进行学习，一步步循序渐进的过程也就是关于数据统计的认知结构的不断完善的过程，这节课结束后学生将本节课的复式统计表所有的概念知识纳入原有的认知结构中，形成新的图式。关于数据整理的方式还有很多，学生将会在日后的长期学习中接触、了解、学习到这些知识，当日后学生们每学一个新的关于数据统计的知识时，他们就会再更新一下自己的认知结构，再形成一个新的图式，图式不仅仅是在这节课学习完后形成，还会在日后的长期学习中再加以更新。

第四章 结论及反思

4.1 结论

在《小数的意义》一课中，教师通过小数的形成的背景知识以及用自身独有的态势让学生对小数进行回忆，这首先能够激起学生的学习兴趣，在课程的一开始就将学生的情绪调动起来，引导学生自觉的对小数的意义进行思考，通过练习能够将小数的意义作为一个整体的概念进行运用，并且通过操作阶段的回忆活动让学生能够将原先关于小数的知识与本节课所学建立起联系，形成知识结构，构建起图式。在《认识克》中，教师通过让学生“掂一掂”“称一称”等活动将整个课堂气氛都调动起来，学生不自觉的形成了对“克”的真正认识，不再是停留在这一词怎么写，怎么读，而是让学生体会到克有多重，因此当教师问学生橡皮、皮球以及面粉等这些物品的重量单位应该是什么时，学生能够将其正确的回答出，并且能够轻松的将“克”与“千克”区分开来，作为一个整体进行应用，最终在学生脑海中形成一种图式。在《复式统计表》中，教师通过一系列的问题引起学生的认知矛盾，开始思考什么是真正的复式统计表，再让学生以小组合作的方式开始探讨，设置问题情境最终引起学生的思考，学生最终通过小组探讨形成复式统计表，在联系中不断的巩固强化该知识，最终也将其纳入认知结构中，形成图式。

分析三个案例可以看出教师这三个老师都是以 APOS 理论阶段进行概念教学，在活动中引起思考，在思考中完善概念，在练习中将概念作为一个整体加以运用巩固概念，最终将本节课的知识纳入知识结构当中，形成不同的、属于学生自身的认知图式。因此用 APOS 理论指导教学具有一定的意义。

4.1.1 APOS 理论下的小学概念教学能促进小学生的发展

首先，会促进学生思维的发展。APOS 理论通过让学生参与活动，在活动中形成思维的內化，在这个过程中学生进行积极的思维活动，用 APOS 理论指导概念教学的教师们通过采用不同层次的活动和引导式教学来培养学生在概念学习中的思考的能力，帮助学生们经历这些阶段，让学生们在应付这个复杂世界时可以做好更充分的准备，使得小学生们可以从概念教学中获得思考，提高他们的批判性思维的能力，马修·李普曼认为批判性思考是一种熟练的、负责任的思考，并且有利于实现良好的判断力，因为批判性思考有赖于标准，可进行自我修正，对情景敏感。换句话说其实就是，具有批判性思维的人能够在任何情景中，使用相关的证据、准则和明确的标准，找出理由来支持自己的观点。同时也能促进学生的创新思维的发展，学生

在活动中思考，不管是正确的还是偏离的，都将是学生思考的过程，学生会慢慢的形成思考的习惯，不断的促进学生创新性思维的发展。

其次，将会促进学生的语言表达能力和逻辑思考能力。在 APOS 理论指导下的小学数学概念教学鼓励小组合作，他们在合作中会表明自己的想法，在述说自己想法时尽最大的可能性让小组中他人理解自己想法的过程，就已经在促进学生的语言表达能力，当最后学生形成自己对概念的理解时，需要学生用自己的话先来描述概念，他们在描述概念之前，也会在头脑中先思考如何组织语言，比如，如何进行要点的陈列等，有时学生们用自己的语言构建出来的概念甚至比教材上更好。且当学生表达自己想法之前会在自己的头脑中对该想法先进行简单的提纲罗列，想清楚自己如何组织语言将会更加清晰，并且学生在操作阶段到过程阶段的思考过程中，也表明了学生在进行内部的逻辑思维活动。比如在《复式统计表》中，L 教师让学生们以小组合作的方式进行讨论，第四组成员在画图前先进行了讨论交流，说出自己的想法后又结合彼此的想法最终将四个单式统计表合在一起，当这个小组的成员在讲台上陈述自己小组的作品时，他们组明显要比其他组成员所陈述的更加清晰和有逻辑，这得益于他们在小组合作时他们的讨论交流。

第三，APOS 理论指导数学概念教学将会促进学生真正解决问题的能力。学习数学目的不仅仅是让学生了解某个知识理论，而是要让学生在日常生活中遇到一些问题时，能够运用这些知识，用数学的眼光看待并且解决这个问题，并且能够用数学语言帮助他人解决问题。APOS 理论强调在操作阶段要给学生提供有意义的活动，促进学生的思维活动，帮助学生用整体概念分析问题、解决问题，并且要求学生用自己的言语表述出数学概念，这些将有助于促进学生的解决问题的能力，在这三个案例中，三位教师在课堂中都选择性的、适当的将内容进行精简，取而代之的是让小学生自身深入探究其相关的概念并且将其作为一个整体的对象进行应用，以此让学生能够深入浅出的了解这些概念性知识，能够应用到习题中、生活中等，将过去的知识、过去对本节课知识的理解与现有的复杂问题结合起来，学生真正的理解了其中的含义，而不仅仅是停留在当下的想法和态度上面，不仅仅理解了这个概念，还学会了在众多概念中正确的选择某个概念进行运用。

第四，以 APOS 理论为指导的小学数学概念教学将会促进学生之间的相互协作力，在案例中表明，相互协作是一种很好的解决问题的方式，比如在《复式统计表》一课中，L 教师让学生进行组内的相互协助，学生在小组合作中与其他同学交流自己的想法与观点，由此学生与学生之间的观点得到碰撞，又可以形成新的观点，弥

补自身想法的不足,使得观点更加完整系统,但如果在组内产生分歧后没有进行调解形成一致的观点,或者产生“唯我正确”的想法而不积极参与小组的讨论,将不会出现最后好的结果。小组之间的相互协作当学生未来步入社会后也将会对自身产生很大的帮助。

4.1.2 APOS 理论下的小学数学概念教学能促进小学生学习的积极性

APOS 理论指导下的小学数学概念教学能增强学生学习的积极性。在《小数的意义》中,S 教师增加了数学史,学生不仅仅能更加的理解概念内容,而且更加促进了学生的学生兴趣,学生在课堂上更加活跃,增加了学生的学习积极性;在《认识克》中,W 教师从学生经常看到的物品出发,利用黄豆感受 1g,利用两个 500 克面包得出与 1000g 与 1kg 的关系,这些在很大的程度上调动了学生学习的积极性,在课堂上学生们聚精会神的听着教师的每一句话,认真思考教师抛出的每一个问题;在《复式统计表》中,L 教师激发起学生的求知欲,让学生“欲罢不能”的想要探索接下来的问题,有的学生甚至觉得老师提问题时的语速太慢,恨不得 L 教师能一秒钟说完要求,自己赶紧投入到自己的探索中去。从数学史的引入到实际生活中的事物再到引起学生的探索欲,这都是 APOS 理论阶段中所需要的。因此,用 APOS 理论指导小学数学概念教学将极大的促进学生学习的积极性,有了积极性、有了学习的动机教师要将其转化为学习的行为,这就是要让学生保持充分的学习热忱,小学生对于概念学习的参与度、毅力和勤奋都是学习热忱的重要组成要素,应该时刻让学生保持对数学学习的自信心、自我效能感、洞察力和特有的兴趣,教师应该通过设计一些情感上和智力上都具有相关性和激发性的课程或者事例,用这些课程或者事例直接培养学生的学习热忱。比如,小学阶段的课堂相比于初高中而言是更具有活跃性的,小学生就像一张白纸一般,因此他们在课堂上经常会提出一些奇怪的想法,有一次在听一节学习“直线、射线、线段”的课,当老师问道“同学们,你们知道该怎么画直线就可以表示出直线的无限长吗?”当时有个学生举手回答“首先我们先随便画一条线,然后在这条线的两边点上省略号,表示它的两边还有无限长”,其实在课堂上教师应该抓学生的这些创意点,学生能够运用以前所学的知识,用一个符号来表明自己心里所想的直线的样子,具有符号意识。在课堂上教师应该让学生尽情的表达出自己对数学的想法,鼓励学生的这些想法,只有这样才能不压抑小学生的天真,才能不泯没小学生对于数学学习的热情。

4.2 反思

教师不可能一夜之间学会概念教学，教学是一门艺术，也是一门科学，APOS 理论下有效的小学数学概念教学并不是从空架子上拿下来的某样东西，其中包含许多组成部分，而教学艺术创造了各个组成部分之间的自然流动，所以要想真正的领会 APOS 理论指导下的小数数学概念教学，就给小学阶段的教师提出了更大的挑战。

4.2.1 应增强教师自身专业素养

很多教师知道数学概念在数学学习中的重要性，小学数学概念在整个数学学习中的基础性作用，但是在实际的教学过程中却将概念的讲解，概念教学进行压缩，采用做大量练习题进行巩固的方式。从 APOS 理论阶段来看，这些教师忽视对操作阶段和过程阶段的学习，快速的让学生进入了对象阶段，强迫的让学生必须理解概念并且学会使用概念。但是不经过外部刺激的操作阶段而引起思维内化的过程阶段这样的概念学习是过于激进的，学生根本无法理解概念，而在不断的练习中学生即便学会做题，也只是记住了这种类型题的“套路”，而不是学会分析。甚至在一些地区一些小学数学教师会采取让学生背诵的概念的方式，学生最终确实是可以流畅的将概念背诵出来，拎出哪个概念学生都背诵的很流利，但是让小学生做题时，结果却差强人意。因此，要想真正在小学阶段实现概念教学，第一步就要从教师入手。

首先，要进行真正的概念教学，教师就要有概念教学的意识，要从自己的内心深处真正的感觉到概念的好处，并且能够在实际的教学生活中将概念教学始终贯彻，只要教师真正的意识到了，概念教学才能真正的到达。同时教师在授课时还应该有充分的热情，在《小数的意义》一课中，S 教师用自己充分的热情将学生的积极性调动起来，正是因为 S 教师上课时的情绪状态，才能让这节看起来没有什么特色的课变得具有特色，才能让孩子的从站在巨人的肩膀上学习方式，变成自己就是“巨人”的学习方式。

其次，APOS 理论下的小学数学概念教学要求教师提高观察分析能力，因为在 APOS 理论指导下的概念教学时要让学生通过日常生活中熟悉的事物进行思考，要在操作阶段给学生提供一些问题的、创设一定的情景，通过这些有意义的、与本节课所学概念联系紧密的、能促进学生积极思考的外部刺激最终达到学生对概念的初步理解与认知，同时这些问题情境不仅能够让学生“温故”，还能“知新”，让学生与自己的实际生活联系起来，只有这样才能真正的让学生学会知识，并将其融会贯通。在这种情况下，教师就应该更加仔细的观察生活，积累生活中有利于教学的点滴，而且还要对学生提出的有趣的生活问题进行启发式的回答，这些都对教师提出了更高的要求。因此这就要求教师在平时的生活中要比其他职业者更加注重观察，能够

从实际生活中找到帮助学生学习的的事物，并且将其转化为数学知识，比如在《认识克》这一节课中，W 教师用重量比较轻，学生比较熟知的又利于学生实际操作的黄豆以及面包作为学生实际活动的对象，学生们在日常生活中经常看到的事物，这样通过身边事物进行活动，既能引起学生的求知欲和学习的积极性，又能够帮助学生理论与实际相联系。

最后开展专业培训，从三个案例中我们可以看出，真正好的概念教学与 APOS 理论阶段所描述的极为相似，因此要为小学数学教师开展关于 APOS 理论的概念教学，不仅仅要让小学教师明白什么是真正的数学概念教学，还要让教师们掌握一定的理论帮助小学数学教师进行概念教学。因此小数教师应该多与本校以外的教育界接触，学校领导可以多与高等院校进行沟通交流，建立与高等院校的学习桥梁，邀请一些高等院校的学者专家给本校教师进行关于 APOS 理论下的小学数学教师应该如何进行概念教学。但是，这些讲座仅仅是给教师们播下了一颗新思想的种子，要想让这颗具有新思想的种子得以生根发芽，主要还在于教师们是否扩展并付出实践，因此，学校系统也应该加大力度，给教师们提供定期的基于工作的培训，让教师们在理论中了解 APOS 理论下的小数数学概念教学，又能在实践中运用它并且发现其中的问题再不断的进行完善，当理论与实践发生冲突时，再与专家学者交流询问再返回到实践中去。

通过以上的一些简单的措施，让教师不仅仅小学数学教师不仅仅了解概念教学、APOS 理论以及二者之间结合的使用，而且通过以上方式还要让教师真正的行动起来，在课堂中真正的用 APOS 理论指导小学数学概念教学，填补了解和做之间的鸿沟从而真正的促进学生的发展。

4.2.2 应提高教师教学能力

首先，备课的重要性怎么夸大都不为过，不但可以让教师了解知识点，明确重难点，还能让教师提前预设一些问题以应对课堂上的一些不时之需。备课不仅仅要备教法，更重要的是备学生和备教材，在 APOS 理论指导下的小学数学概念教学中，更是要注重这些。比如，在《复式统计表》中，L 教师当发现教材上的教学内容不足以真正的唤起学生原有的知识时，她选择了让学生们自己再列出单式统计表，而不是参照教材直接给出学生单式统计表，让学生真正的动手绘制单式统计表，学生在下笔之前在头脑中已经对单式统计表进行了回忆，为本节课复式统计表的学习打下了良好的基础。APOS 理论下的小学数学概念教学要求要真正的唤起学生的思维，而这时就要思考教材上的给出的内容是否能够真正的帮助到学生的思维发展，就不

能仅仅是教教材，而要做到用教材；在《认识克》中，W 教师采取走下讲台让学生们摸一摸，掂一掂实际的重量这样的教学方式，一节课结束后学生们对克的这个概念不再感到抽象等。APOS 理论指导下的小学数学概念教学更加关注学生，让学生作为真正的探究概念的主体，让学生的思维活动起来，通过不断的外部刺激促进学生思维的活跃，这就要求小学数学教师在备课时充分考虑到如何通过外部刺激才能促进学生的思维。

其次，上课时，首先 APOS 理论指导下的小数数学概念教学需要有明确的活动目标。在 APOS 理论中的操作阶段，教师需要明确的提出操作的要领，要给出学生明确的操作步骤，只有在这样的情况下，学生才能根据目标进行操作，从而促进思维的内化；第二，适当小组合作学习的机会。APOS 理论给学生提供一些情境，通过这些外部刺激以达到学生的思维内化，但是有时我们的思维具有狭窄性和局限性，因此当学生在小组中活动时将可能有“头脑风暴”，学生们自身原有的知识经验和活动进行碰撞，每个人都会成为小组中的小老师，贡献出自己的思维智慧，最终在教师的引导下达到对概念的理解。比如，在《复式统计表》中，第四小组在收到 L 教师将四个单式统计表合起来的命令后，第一步做的不是着手开始画，而是小组间成员进行讨论，到底应该怎么画才是真的把四个单式统计表合起来呢？最终在小组的集体讨论下形成复式统计表，每个小组都形成了由小组讨论后形成的复式统计表，学生在经过这些讨论后，在进行复式统计表的优点总结时，几乎都是由学生说出，教师只是起一个主导作用。因此在进行 APOS 理论指导下的小学数学概念教学时，教师要充分合理的发挥小组合作的作用。第三，APOS 理论指导下的小学数学概念教学教师应该为学生提供一些代表性的概念词汇。不管在任何的情景中，学生都需要一种语言来沟通他们自己的想法，也需要凭借这种语言理解自己听到的一些内容。即便是针对小学生而言，他们也用沟通自己想法的能力，因此教师在概念教学的过程中，应该提供 5-8 个可进行重大迁移的概念词汇来压缩授课内容，让学生利用这些词汇自己花时间来建构，在这其中教师要通过让学生利用这些词汇解释是如何进行操作阶段的活动的，使得学生们的思考对于老师而言是可见的，因此，在整个课的设计中教师应该精选内容，减少信息量。第四，作业的布置与练习巩固题的设置应该是具有针对性的，APOS 理论的对象阶段要求，学生可以将概念作为一个整体进行利用，因此小学数学教师在进行课堂上的练习题时，一定要做到趁热打铁，学生在对概念进行理解后，让学生做练习题，以此来判断学生是否可以将概念作为整体加以运用。比如，L 教师在对《复式统计表》进行最初教学设计时，有幸能够与该教

师进行一些简单的对话，该教师表示觉得这节课好像并没有什么可讲的，而且在这节课讲完后，我向该教师表示这节课很完美，她对我说：“其实在未进行练习巩固时，我还有点担心，怕学生们还是无法理解复式统计图”，这也充分说明学生是否已经到达对象阶段，是否可以对概念进行整体的运用，一定程度上是可以体现在练习题上的，因此这也说明了，小学教师在进行概念教学时，一定要对练习题进行精心的设计，使练习题中完全能够体现出概念的核心。最后，适当的引入数学史，学生可以将自己想象成数学家，想象如果自己是当时的数学家会如何对这个概念进行解释，与数学家产生共鸣，增加学习数学的乐趣，同时还能够使学生了解概念的源头，概念的形成过程，这样可以使学生更容易理解概念。比如，《小数的意义》中，S 教师让学生们了解小数点的形成过程，使得学生更加想要去探索接下来的内容，S 教师经常给学生们延伸一些数学史的知识，这也就要求教师不应该仅仅有本体知识，还应该具有一些条件性知识。

4.2.3 应提升教师团队协作和反思能力

首先，要敞开大门。现在我们教师的教学都是关上门的教学，教师之间的相互孤立是实现教学进步最大的敌人。试想一下，你作为一名教师，让你的同事帮你修改一下你的教学设计，邀请你的这位同事去听你的课，并且对你这节课进行观察，你的内心是接受还是拒绝的？或者你听说明天将有会教育行政部门的领导来观察你的课堂，并且做出评价，你的内心是紧张还是兴奋？我想答案都是一样的，那就是拒绝以及紧张，如果这样的话，其实你并不孤单。原因可能是人们都不喜欢被人评头论足，甚至有专业上的不安全感，更糟糕的是，我们很多时候有无需被他人建议的错觉，如果我们不具备一种“被辅导的能力”，那么我们的学习过程就会比原本需要的更为困难，更加的缓慢，这也就是闭门造车。同大多数的行业一样，教育事业也需要打开门，如果我们教师能够虚心听取他人的意见，吸收并且付出实践，接受来自他人的帮助，那么我们会成长的更快，用更好的协作方式提高教学技能，就可以更加有效的填补了解和做之间的鸿沟。教师与教师之间可以就之前的讲座或者培训在 APOS 理论的指导下协作进行小学数学概念教学的教学设计，也可以协作上课，打开门的教学比关上门的教学更加能够获得成长，以这样的方式备课上课，在这样的模式下辅导他人，被他人辅导，会进一步的促进自身的进步。比如，在《认识克》这节课中，W 教师最终所呈现的课堂其实并不是她一个人的课堂，而是三年级整个数学小组所呈现的数学课堂的思维，W 教师作为一名青年教师，急需前辈们的帮助，因此当她在教学设计过程中遇见问题时，会及时请教她的组长以及教师小

组的其他成员，相反，在 XX 小学实习的日子，碰巧听过两节另外一位青年教师的课，她对课堂中学生的散漫无法控制，也无法把握整节课的节奏，当我课下了解后，才知道原来这位老师很少与自己小组内其他组员进行交流，当自己在教学设计过程中遇到问题时也不去解决，而是应付着上课，W 教师的课更贴近学生，也更能激发起学生的学习积极性。而用一个新的理论对教学进行指导，就更需要教师敞开大门，让更多的教师参与到自己的教学中，不管是教学设计中还是教学过程中，都要形成教师共同体，进行团体协作共同上好每一节课。

其次，APOS 理论指导下的概念教学其教师应该有反思能力。第一，在行动中反思。20 世纪 80 年代，美国学者舍恩提出反思性实践，他认为在整个教学中充满着复杂性、模糊性、不稳定性，是真实的教学过程中的“不确定地带”，因此在这一地带中，仅仅靠利用教育理论知识，重复之前已经做好的教育计划是远远不够的，这也正是用 APOS 理论指导数学概念教学时所会遇到的，APOS 理论指导下的小学数学概念教学就是要帮助学生获得更深层次的概念性理解，帮助学生实现有意义的建构，因此在教学时教师要时时注意学生的状态，时时能够根据学生生成性的东西转化成一个新的情景，帮助学生达到更高层次的理解，时时关注学生的理解层次等等，在这个过程中要通过观察学生的多个角度来判断学生的是否在思考，在这其中教师预设的活动在课堂上能发生些什么等等问题，因此这也就要求教师在进行概念教学时要在“行动中思考”，在实际的教学活动过程中也要不断的反思和思考，教师在促进学生思考的过程中，自身也应该在思考，能根据学生的现状不断的调整教学；第二，在行动后反思，小学教师在 APOS 理论指导进行概念教学后，教师要将在课堂上出现的问题进行反思，包括学生的状态、学生对活动的积极程度、学生的思维活动状态、活动是否能促进学生的思维以及学生的接受情况等等，这些反思内容看似简单，但是却是教师在整个教学生涯中的一笔宝贵的财富，不会反思的教师不可能成为一名好的教师。比如，在 XX 小学实习的这段时间有一位 H 老师，这位教师被很多其他教师夸赞其讲课好，她的学生接受程度特别高，但是当仔细了解这位教师后发现，当其他教师在办公室闲聊时，她在思考，当她听了其他老师的课后，她在本子上记录，后来有一位即将退休的教师跟我说“H 老师特别爱思考，每次教研活动时，她总是最后一个，她将前面教师可借鉴的地方融合在自己的思想里，当她发现自己这节课讲得不好时，她会认真反思和与其他教师讨论，当她下一次讲时就特别精彩”。因此 APOS 理论指导下的数学概念教学的教师们也应该注重反思，在行动中的反思和行动后的反思，这样才能真正的积累起概念教学的经验，才能真正

的促进学生的发展。

会思考的孩子眼睛里会发光，当一个学生瞪大眼睛盯着老师，并且他真正的关注不仅仅是你，而是更加关注你所讲解的内容以及内容所引起的思考时，学生的思维就已经开始活动。那么如何启发学生的思维，如何让孩子能真正的思考起来，概念在其中起着很重要的作用，在孩子进行思考的时候，其实正是在对概念进行深刻的、有意义的理解的一种象征，概念不仅仅能够真正的构建起数学的关键内容，而且概念还是思维的细胞，促进学生的有意义思考，发散学生的思维。尽管概念在学生的学习中扮演着这么重要的角色，但是如果教师在教的过程中一直是由自己讲，学生听，教师提出问题再由教师告诉学生们如何解决这个问题，那么概念的重要性也就变得不再重要，因此，为了能够真正的彰显出概念的重要性，教师在进行概念教学的过程中一定要将课堂还给学生，一定要让学生尝试去探索那些结构模糊或者故意被设计成开放式的问题。这样的课程不仅仅需要学生的主动性，更重要的是需要教师的主动思考。

4.3 展望

首先，APOS 理论应用于小学数学概念教学中不仅仅给教师的概念教学提供了一些建议，而且还能够指导学生如何进行数学概念的学习，APOS 理论不单单是一个理论，更重要的是它其中所蕴含的道理，虽然 APOS 理论中仅仅阐述了四个阶段，但是这四个阶段蕴含着新课程改革后在教学方面需要改进的一些要求，比如在操作阶段中，强调要联系学生的实际生活，这正体现出教育上一直呼吁的教学不能脱离生活实际；在过程阶段中，要让学生进行思考，自己抽象出事物的本质属性，在操作和过程这两个阶段中，正是我们现在所强调的要将课堂还给学生，要让学生自己发现知识，自己学习知识，自己探索知识，自己理解知识，而教师在其中只是扮演者引导者的作用；在对象阶段，学生得以对整个概念进行运用，这正是现阶段所强调的学习是为了应用，而不仅仅是拥有，学习是为了应用；最后在图式阶段中，这也正是每个教师、专家学者以及家长等所想要达到的最终目标，让学生形成属于自己的知识体系，知识应该是整体的，而不应该是零散的。纵观整个数学教材，数学概念无处不在，就连 1 都是一个概念，因此如果概念不清，学生就难以准确应用，就听不懂老师在讲什么，也不知道自己该学什么，如此积累，慢慢的就很可能产生我们经常所说的“学困生”。因此，在小学阶段甚至在所有的学科、所有的学段学习中，概念的学习都显得尤为重要。因此把 APOS 理论应用在小学数学概念教学中应该具有

很好的教学效果。

其次，在研究内容上，受研究时间和研究能力的影响，没有将两节同样的课分别以运用和没有运用 APOS 理论数学概念教学进行比较，因此，还是存在一定的理想化，而且，即便进行了前后对比也难以保证其准确性，学生与学生之间存在着一定的差异，当然班级与班级之间也有不同之处，因此，当同样的老师采用不同的方法进行授课时，也会存在一定的差异性。在研究方法上，由于本文所需的访谈内容比较简单，应该扩大访谈对象，但本文访谈对象的数量有点少。最后，小学阶段是一个长达六年的阶段，学生不管是心理还是身体都有比较明显的变化，因此应该进行学段划分，而本文对小学进行了笼统的概括，这是本文最大的不足之处。

最后，从 APOS 理论的普适性以及小学数学概念教学所具有的意义分析，两者的结合必定会产生不同的凡响。在对文献进行梳理的过程中发现将 APOS 理论与小学数学概念教学结合起来的还是比较少，因此这将是一个比较新的课题，相信本文可以起到一个抛砖引玉的作用，为后续的研究工作提供一定的借鉴作用，也为一线的教学工作者提供一些新的教学路径，相信通过大家的努力，APOS 理论可帮助教师提高小学数学课堂的概念教学水平与质量，也可以帮助小学生自身更好的理解数学概念，从而使学生获得真正的发展。

参 考 文 献

期刊

- [1] 乔连全. APOS:一种建构主义的数学学习理论. 全球教育展望, 2001, 03, 16-18.
- [2] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解. 数学教育学报, 2007, 16, 48-50.
- [3] 裘红明, 吴道春, 夏金芝. 数学概念学习探. 成都大学学报(教育科学版), 2008, 05, 70-72.
- [4] 孙雪梅. 基于认知结构差异理论的数学教学的探究. 数学教学通讯, 2008, 08, 1-5.
- [5] 金海月. 概念图在评价数学概念性理解中的应用. 数学教育学报, 2015, 24, 55-59.
- [6] 谭劲, 李光树. 小学数学学习特点对教学的影响. 课程. 教材. 教法, 2014, 34, 58-63.
- [7] 林丽钦. 小学数学概念教学的体会. 教育评论, 1999, 03, 69-70.
- [8] 张丹, 吴正宪. 培养小学生问题提出能力的实证研究——小学数学教学为例. 中国教育学刊, 2017, 05, 100-104
- [9] 程明喜. 小学数学“深度学习”教学策略研究. 数学教育学报, 2019, 04, 66-70.
- [10] 钱学锋. 数学教学促进学生深度学习的思考. 教育理论与实践, 2018, 38, 58-60.
- [11] 吴正宪. 问题解决与数学思考. 江苏教育, 2014, 41, 08.
- [12] 朱新秤. 批判思想的教学与迁移. 教育研究与实验, 1999, 01, 42-46.
- [13] 林敏, 孙志凤. 简评皮亚杰关于反省抽象及其发展的研究. 华东师范大学学报(教育科学版), 2006, 02, 66-71.
- [14] 宋惠芳. 皮亚杰建构理论的启示. 马克思主义研究, 2000, 04, 58-63.
- [15] 秦亚青. 建构主义:思想渊源、理论流派与学术理念. 国际政治研究, 2006, 03, 1-23.
- [16] 李子建, 宋萑. 建构主义:理论的反思. 全球教育展望, 2007, 04, 44-51.
- [17] 蒋网健, 周建香. 基于 APOS 理论视角下初中数学概念课的教学实践——以苏科版“合并同类项”一课为例. 上海中学数学, 2018, Z1, 52-55.

- [18] 汪留屿. APOS 理论指导下的复合函数求导教学研究. 上海中学数学, 2017, 11, 15-17.
- [19] 李星云. 小学数学概念教学的优化策略. 教育评论, 2007, 02, 79-81.
- [20] 曾玉祥, 刘玉琼, 黄永辉. APOS 视野下分层合作学习应用研究——以高等数学教学为例. 黑龙江高教研究, 2013, 31, 171-173.
- [21] 薛茹. 小学数学概念教学存在的问题及策略. 数学教学通讯, 2013, 16, 42-43.
- [22] 张秀丽. 小学数学概念教学中存在的问题及对策. 学周刊, 2013, 29, 169.
- [23] 张彩云, 赵佩资, 李秋石. 基于 APOS 理论的生物学概念教学——以“基因突变”为例. 生物学教学, 2019, 44, 16-19.
- [24] 刘稳华, 年媛媛. APOS 理论对物理教学的启示. 陕西师范大学学报(自科版), 2005, s1, 278-279.
- [25] 邵光华, 章建跃. 数学概念的分类、特征及其教学探讨. 课程·教材·教法, 2009, 29, 47-49.
- [26] 王宽明, 夏小刚. 基于有意义学习的数学概念教学. 课程教学, 2011, 04, 81-83.
- [27] 刘彩萍. 设计先行组织者——数学概念的全新视角. 中学课程资源, 2007, 11, 45-47.
- [28] 石颐园. 基于 PCK 内涵解析视角的初中数学概念教学策略. 教育理论与实践, 2017, 37, 51-54.
- [29] 李敏. 试析如何优化数学概念建立的教学过程——以“角的认识”中相关概念教学为例. 小学教学参考, 2017, 29, 30-31.
- [30] 张莹. 基于建构主义的数学学习理论——APOS 学习理论及其发展趋势. 数学学习与研究, 2007, 02, 32-32.
- [31] 王增强. 基于 APOS 理论视角下的小学数学概念教学——以“分数的意义”教学为例. 中小学数学:小学版, 2016, 03, 1-3.
- [32] 王锐利. 分析基于 APOS 理论的小学数学概念课设计——以“生活中的比”为例. 新教育:海南, 2016, 13, 36-37.
- [33] 曹荣荣. APOS 理论视角下无穷概念认知分析. 数学教育学报, 2010, 19, 17-19.
- [34] 曾玉祥. APOS 理论在高等数学概念探究式教学中的应用. 教育探索, 2013, 05,

42-43.

[35] 吴正宪. 追求教师职业生命价值. 人民教育, 2005, 17, 38-40.

[36] 饶从满, 张贵新. 教师合作: 教师发展的一个重要路径. 教师教育研究, 2007, 01, 12-16.

[37] 董惠军. 基于教师合作的教师专业发展途径探索. 中国教育学刊, 2018, s1, 202-204.

[38] 岳晓东. 批判思维的形成与培养: 西方现代教育的实践及其启示. 教育研究, 2000, 08, 65-69.

硕博论文

[1] 钱丽娜. 基于 APOS 理论的小学数学概念教学研究. 杭州师范大学, 2018.

[2] 张熠. APOS 理论指导下的小学数学概念教学设计研究. 宁波大学, 2018.

[3] 侯萍. APOS 理论下信息技术与数学概念教学的整合. 华中师范大学, 2015.

[4] 郭芳. APOS 理论下立体几何线面位置关系的教学研究. 河南大学, 2019.

[5] 邵东涵. 基于 APOS 理论的“实数”概念的教学研究. 华中师范大学, 2012.

[6] 吴梦园. 引导发现法在小学数学概念教学中的运用研究. 杭州师范大学, 2016.

[7] 田雅芬. 基于 APOS 理论的中学化学概念教学研究. 天水师范学院, 2017.

[8] 徐嘉婕. 基于 APOS 理论的高中生物学核心概念教学的应用研究. 陕西师范大学, 2019.

[9] 崔灵灵. 概念图在小学数学概念教学中的应用研究. 河南大学, 2014.

[10] 闫天灵. 小学数学概念教学策略的研究. 天津师范大学, 2010.

[11] 闫小颜. 小学数学概念教学的育人价值及其过程结构研究. 华东师范大学, 2011.

[12] 王晓娟. APOS 理论在初中数学概念教学中运用的策略研究. 西南大学, 2013.

[13] 佟亮亮. APOS 理论视角下数学概念教学模式的探究. 东北师范大学, 2013.

[14] 罗宝华. 建构主义与数学概念教学. 湖南师范大学, 2001.

[15] 李梦琼. 利用思维导图提高小学生数学单元复习能力的实践研究. 南京师范大学, 2015.

[16] 柳敏. APOS 理论下的高中平面向量教学研究. 上海师范大学, 2012.

[17] 朱巡. APOS 理论下高中数学概念教学研究. 扬州大学, 2019.

[18] 朱敏慧. 基于 APOS 理论的三角函数教学设计研究. 上海师范大学, 2012.

[19] 李善良. 现代认知观下的数学概念学习与教学理论研究. 南京师范大学, 2002.

著作

[1] 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准(2011 年版). 北京, 北京师范大学出版社, 2011.

[2] 邱兴华. 小学数学教学研究. 福建, 福建教育出版社, 1990.

[3] 李善良, 现代认知观下的数学概念学习与教学. 南京, 江苏教育出版社, 2005.

[4] 十三院校协编组编, 中学数学教材教法. 北京, 北京高等教育出版社, 1987.

[5] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论. 北京, 高等教育出版社, 2004.

[6] 张奠宙. 数学教育学. 南昌, 江西教育出版社, 1991.

[7] 曹才翰, 章建跃著, 数学教育心理学. 北京, 北京师范大学出版社, 1999.

[8] 林武, 小学数学概念教学:行与思. 北京, 教育科学出版社, 2014.

[9] 林恩·埃里克森, 洛伊斯·兰宁著, 鲁效孔译. 以概念为本的课程与教学. 上海, 华东师范大学出版社, 2018.

[10] 帕克·帕尔默著. 教学勇气—漫步教师心灵. 上海, 华东师范大学出版社, 2014.

[11] 濮安山主编. 中学数学教学论. 哈尔滨, 哈尔滨工业大学出版社, 2002.

[12] 鲍建生等. 数学学习的心理基础与过程. 上海, 上海教育出版社, 2009.

[13] 袁振国. 教育研究方法. 北京, 高等教育出版社, 2000.

[14] 马忠林. 数学学习论. 南宁, 广西教育出版社, 2007.

[15] 郑毓信, 梁贯成. 建构主义与数学教育. 上海, 上海教育出版社, 2002.

[16] 李士锜. 数学教育心理. 上海, 华东师范大学出版社, 2001.

[17] 王道俊, 王汉澜. 教育学. 北京, 人民教育出版社, 1988.

[18] 钟启泉. 现代教学论发展. 北京, 教育科学出版社, 1992.

[19] 邵瑞珍. 教育心理学——学与教的原理的心理学. 上海, 华东师范大学出版社, 1990.

外文

[1] Jean-Paul Fischer, Emmanuel Sander, Gérard Sensevy, Bruno Vilette, Jean-François Richard. Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade, 2019, 34, 2.

- [2]Mike Altieri,Evelyn Schirmer. Learning the concept of eigenvalues and eigenvectors: a comparative analysis of achieved concept construction in linear algebra using APOS theory among students from different educational backgrounds. *ZDM*, 2019, 51, 7.
- [3]Dubinsky E, Mcdonald MA. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. 2001, 7, 275-282.

附录一

访谈提纲

1. 您认为概念在学生的数学学习中重要吗？
2. 您认为概念教学怎么样？
3. 您觉得学生们在课堂上对知识的接受状况如何？
4. 您在教学中是真正的在进行概念教学吗？
5. 您知道什么是 APOS 理论吗？您对该理论有了解吗？
6. 您认为您在您概念教学的整个步骤跟 APOS 理论阶段相似吗？
7. 如果用 APOS 理论指导数学概念教学您觉得将产生什么效果？

附录二

第一到第四小组探讨复式统计示意图

乐器	性别	人数
古筝	男	7人
	女	21人
葫芦丝	男	17人
	女	10人
笛子	男	16人
	女	6人
小提琴	男	14人
	女	16人

乐器	合计	男	女
古筝	28人	7	21
葫芦丝	27	17	10
笛子	22	16	6
小提琴	30	14	16

太原市第二实验小学五年级乐器兴趣小组人数统计表

2019年11月

乐器 \ 性别	男	女	合计		
古筝	7	21	28		
葫芦丝	17	10	27		
笛子	16	6	22		
小提琴	14	16	30		
合计	54	53	107		

太原市第二实验小学五年级乐器兴趣小组人数统计表

2019年11月

种类 \ 性别	合计/人	男/人	女/人		
古筝	28	7	21		
葫芦丝	27	17	10		
笛子	22	16	6		
小提琴	30	14	16		
总共	107	54	53		

致 谢

两年前，我怀着对知识的渴望和对未来的憧憬步入山西大学开始研究生生活，时间飞快，眨眼睛间，这两年的学习生活已接近尾声，心中难免生出不舍之情，回首这两年间，往日的点点滴滴历历在目，在此，我想向给予我帮助和支持的人表示感谢。

首先，感谢我的导师郭老师，她的平易近人和知识渊博都让我铭记在心，在我两年的研究生期间，给了我很大的帮助。在学习上，郭老师带我走进了研究的大门，在每一次的读书交流会上和在每一次的学术交流上，郭老师都让我更加明白什么是真正的研究；在生活上，教会我为人处世和给予给温暖；在论文写作上，从题目到论文的构思再到论文的成型，每一步都有着老师的智慧与耐心，多次帮助修改论文，指出问题，提出宝贵的意见，谢谢您郭老师。

其次，感谢求学路上各位老师的帮助，他们平时的授课让我有了更多的专业知识，也让我有了明确的研究方向；感谢实习学校的孙老师和学校领导，给了我更多的实践机会，让我能够接触教学一线，了解许多时间的知识。

第三，感谢孟欣师姐，在每一次论文遇到问题请教她时，她总能给我一些好的构思，即便她也处于即将毕业写论文的阶段也会耐心帮助我。

最后，感谢我的朋友和我的舍友，是你们让我在异乡有了温暖的家，谢谢你们这两年来给我的生活上的帮助以及学习上的鼓励。

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟，以后的日子里我将更加努力。

个人简况及联系方式

个人简况：

姓名：李嘉昕

性别：女

籍贯：山西省长治市

个人简历：

2018 年 9 月-2020 年 7 月 就读于山西大学教育科学学院

2014 年 9 月-2018 年 7 月 就读于长治学院历史文化与旅游管理系

联系方式：

电话：18403554887

邮箱：837364875@qq.com

承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果以后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：李嘉昕

2020 年 6 月 2 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留，使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：李嘉昕

导师签名：郭芳云

2020 年 6 月 2 日